

## COMPORTAMIENTO SÍSMICO NO LINEAL DE EDIFICACIONES SOBRE SUELO BLANDO

*Mario E. Rodríguez<sup>1</sup> y Roberto Montes<sup>1</sup>*

### RESUMEN

La investigación que se describe en este artículo estudia el efecto de la flexibilidad del sistema cimentación-suelo en el comportamiento sísmico de edificaciones. Se efectúa un estudio paramétrico simplificado empleando un registro de aceleraciones obtenido en la zona de suelo blando de la ciudad de México en el terremoto de septiembre de 1985. Los parámetros de respuesta que se seleccionaron para este estudio fueron el desplazamiento máximo del último nivel de un edificio relativo a la base y la energía histerética disipada por una estructura sencilla que representa una edificación de varios niveles sobre base flexible. Estos parámetros se emplean además en un procedimiento de evaluación de daño por sismo en edificios. Los resultados indican que en la mayor parte de casos, la respuesta inelástica de edificaciones sobre base flexible y el daño por sismo de éstas se pueden evaluar considerando el caso de edificaciones sobre base rígida.

### ABSTRACT

The investigation reported in the paper studies the effects of soil-structure interaction (SSI) on the seismic response of building-foundation systems. A parametric study is conducted using the EW component of the ground acceleration recorded at the SCT station in Mexico City during the 1985 earthquake. Peak response parameters chosen for this study were the roof displacement relative to the base and the hysteretic energy dissipated by a building on soft soil during an earthquake. The results indicated that inelastic response and seismic damage of buildings considering SSI effects can be evaluated using results from the rigid base case.

---

Artículo recibido el 27 de octubre de 1997 y aprobado para su publicación el 10 de abril de 1998. Se aceptarán comentarios y/o discusiones al artículo hasta cinco meses después de su publicación

*1 Instituto de Ingeniería, UNAM  
Ciudad Universitaria, Apartado Postal 70-290  
Coyoacán, CP 04510, DF  
E-mail: mrod@servidor.unam.mx*

## INTRODUCCIÓN

La investigación que se describe en este artículo estudia el efecto de la flexibilidad de la base de una estructura (interacción suelo-estructura) en el comportamiento no lineal de edificaciones durante terremotos. En el caso de la ciudad de México, este efecto se presenta en estructuras sobre suelos típicos de la zona del antiguo lago de la ciudad. La mayor parte de daños o colapsos durante el terremoto del 19 de septiembre de 1985 ocurrieron en edificaciones sobre el tipo de suelo mencionado, por lo que es de interés analizar el efecto de la flexibilidad de la base de estructuras en estos daños o colapsos.

Los objetivos de este estudio son el evaluar la importancia de los efectos de interacción suelo-estructura en la respuesta sísmica no lineal de edificaciones típicas en la zona del antiguo lago de la ciudad de México, así como comparar los resultados obtenidos con los que se obtendrían en la condición de base rígida.

En esta investigación se emplea un modelo analítico simplificado con el cual se analiza la respuesta sísmica global de edificaciones de varios niveles. Con base en estudios analíticos y experimentales existentes en la literatura, se efectúa un estudio paramétrico empleando un registro de aceleraciones típico obtenido en la zona de suelo blando de la ciudad de México durante el terremoto del 19 de septiembre de 1985.

## DESCRIPCIÓN DEL MODELO ANALÍTICO EMPLEADO Y PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

### Análisis de un sistema sencillo estructura-cimentación-suelo

El sistema sencillo estructura-cimentación-suelo que se considera en este estudio se muestra en la fig 1. Este sistema consiste en una estructura de masa  $m$  que se desplanta sobre un sistema cimentación-suelo deformable. La estructura responde como un sistema de un grado de libertad (1GDL), con una frecuencia circular,  $\omega$ , en la condición de base rígida. Las ecuaciones de movimiento del modelo representado en la fig 1, considerando el movimiento lateral de la superestructura acoplado con el de rotación y desplazamiento lateral del sistema cimentación-suelo, se describen en el apéndice A.

De acuerdo con resultados existentes en la literatura (Bielak, 1978), la masa de la base y el momento centroidal de inercia de la masa superior son parámetros que se pueden ignorar en un análisis aproximado de la respuesta sísmica de sistemas sencillos estructura-cimentación-suelo, por lo que en este estudio estos parámetros no se consideran. Este criterio y las expresiones mostradas en el apéndice A llevan a las siguientes ecuaciones de equilibrio del sistema mostrado en la fig 1

$$\ddot{u} + \ddot{v}_g + \ddot{v}_0 + h\ddot{\theta} + 2\xi\omega\dot{u} + \frac{r}{m} = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{u} + \ddot{v}_g + \ddot{v}_0 + h\ddot{\theta} + \omega_h^2 v_0 = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{u} + \ddot{v}_g + \ddot{v}_0 + h\ddot{\theta} + \omega_m^2 h\theta = 0 \quad (3)$$

En estas ecuaciones  $u$  es el desplazamiento horizontal de la masa  $m$  relativa a la base;  $v_0$  es el desplazamiento lateral de la base que se suma al desplazamiento horizontal de campo libre,  $v_g$ ;  $\theta$  es la rotación de la base (fig 2). El parámetro  $r$  es la función de

resistencia de la estructura;  $\xi$  es la fracción de amortiguamiento estructural crítico; los parámetros  $\omega_h$  y  $\omega_m$  son las frecuencias traslacional y rotacional de la base del sistema cimentación-suelo, respectivamente. En este estudio se considera que este sistema no incursiona en el intervalo no lineal.

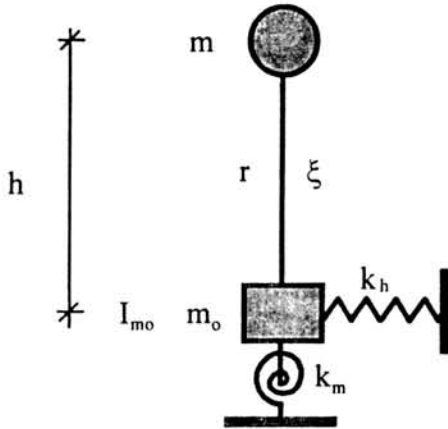


Fig 1  
Sistema sencillo  
estructura-cimentación-suelo

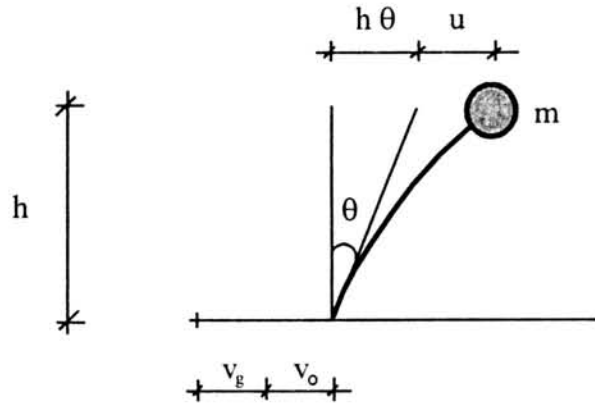


Fig 2  
Componentes de desplazamiento en el sistema  
sencillo estructura-cimentación-suelo

En general, la rigidez y amortiguamiento asociados al suelo son dependientes de la frecuencia de la excitación; sin embargo, en la mayoría de casos en edificios, el considerar que los mencionados parámetros del suelo son independientes de la frecuencia es una hipótesis que lleva a resultados con una aproximación razonable (*Newmark y Rosenblueth, 1971; Wallace y Moehle, 1990*). *Esteva y Mendoza (1989)* realizaron estudios de la interacción suelo-estructura en edificios específicos sometidos a una excitación típica obtenida en la zona de suelo blando de la ciudad de México durante el terremoto del 19 de septiembre de 1985. Para el caso de comportamiento elástico de estos edificios, encontraron diferencias apreciables en la respuesta estructural considerando hipótesis de rigideces dinámicas (empleando valores constantes para éstas) y estáticas (calculadas con criterios especificados por el reglamento de construcciones de la ciudad de México, RCDF, 1993). Sin embargo, para el caso de comportamiento inelástico de los edificios analizados, las diferencias de respuesta en los casos de rigideces dinámicas y estáticas anteriormente comentados, fueron en general menos importantes que en el caso de comportamiento elástico. Con base en lo anterior y tomando en cuenta que un objetivo de este estudio es la evaluación aproximada y paramétrica del efecto de la interacción suelo-estructura en el comportamiento inelástico, se consideró como una hipótesis razonablemente aproximada que las propiedades del sistema suelo-cimentación son constantes e independientes de las frecuencias de la excitación en éste.

Es conocido que en un sistema estructura-cimentación-suelo se debe considerar que además del amortiguamiento en la superestructura, el suelo contribuye al amortiguamiento del sistema por medio de los llamados amortiguamientos por radiación y del material. En las ecs (1) a la (3) se considera de manera simplista que el parámetro  $\xi$  representa el amortiguamiento efectivo del sistema estructura-cimentación-suelo. Este criterio se basa en el de-

sarrollado por *Veletsos* (1977), el cual ha sido tomado en cuenta en los criterios de diseño sísmico que recomienda el *ATC3-06* (1978). En este criterio, el amortiguamiento efectivo del sistema estructura-cimentación-suelo se evalúa empleando la fracción de amortiguamiento crítico,  $\bar{\xi}$ , la cual se define como

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}_0 + \frac{\xi}{(\bar{T}/T)^3} \quad (4)$$

En la expresión anterior  $\bar{\xi}_0$  está asociado a la contribución del amortiguamiento del suelo y toma en cuenta los amortiguamientos mencionados por radiación y del material del suelo. El segundo término de la ec (4) representa la contribución del amortiguamiento estructural y depende tanto de  $\xi$ , como de la relación  $\bar{T}/T$ , en la que  $\bar{T}$  es el periodo fundamental de la estructura amplificada por el efecto de base flexible y  $T$  es el periodo fundamental de la estructura sobre base rígida.

Es de interés mencionar algunos aspectos que dificultan una evaluación rigurosa de  $\bar{\xi}$ . Un aspecto es el referente al amortiguamiento por radiación, el cual de acuerdo con *Meek y Wolf* (1991), puede anularse para frecuencias de excitación menores que la frecuencia fundamental del terreno. Además, el término  $\bar{\xi}_0$  depende de la relación de esbeltez de la estructura (*ATC3-06*, 1978), lo que no se considera en esta investigación. También debe mencionarse que de acuerdo con la ecuación (4), el efecto de la flexibilidad del sistema cimentación-suelo reduce la efectividad del amortiguamiento estructural  $\xi$ , especialmente para relaciones altas de  $\bar{T}/T$ . Una recomendación práctica que trata de tomar en cuenta los aspectos de amortiguamiento mencionados ha sido sugerida por *Veletsos* (1977). Su recomendación se refiere al valor mínimo que se debe emplear para  $\bar{\xi}$ . De acuerdo con este autor, el amortiguamiento estructural  $\xi$  normalmente se basa en mediciones efectuadas en edificaciones, las que generalmente toman en cuenta el amortiguamiento global del sistema estructura-cimentación-suelo, y no sólo el efecto de la contribución de la estructura al amortiguamiento. Por lo anterior, *Veletsos* (1977) sugiere que el valor de  $\bar{\xi}$  debe tomarse igual a  $\xi$  cuando el valor calculado con (4) es menor que  $\xi$ . De acuerdo con esta recomendación, el criterio simplista empleado en esta investigación, de considerar que  $\xi$  representa el amortiguamiento efectivo del sistema estructura-cimentación-suelo, sería un límite inferior del valor que se recomienda para  $\bar{\xi}$ .

Lo anterior sugiere que este estudio tiene el fin de efectuar una evaluación global del comportamiento sísmico de edificaciones sobre suelo blando, y no pretende llegar a conclusiones sobre el comportamiento en detalle de estas edificaciones.

### Análisis de un edificio de varios niveles sobre base flexible

El edificio sobre base flexible que se analiza en esta investigación está representado por el sistema estructura-cimentación-suelo que se muestra en la fig 3. El sistema representa a un edificio regular que tiene  $N$  niveles, cuya excitación en la base está definida por los parámetros  $v_g, v_0$  y  $\theta$ , anteriormente descritos para el sistema de 1GDL. La altura total es  $H$ , y la de entrepiso es constante e igual a  $h_0$ . La masa de la base del edificio y el momento centroidal de inercia del sistema cimentación-suelo son  $m_b^e$  e  $I_{mo}^e$ , respectivamente. Las rigideces traslacional y rotacional de la base del edificio analizado son  $k_h^e$  y  $k_m^e$ , respectivamente. Las frecuencias traslacional y rotacional de la cimentación de la

estructura son  $\omega_h^e$  y  $\omega_m^e$ , respectivamente. La fig 4 muestra el perfil deformado del sistema estructura-cimentación-suelo que se analiza en este estudio. En esta figura, el parámetro  $\delta$  es el desplazamiento de la azotea del edificio relativo a la base.

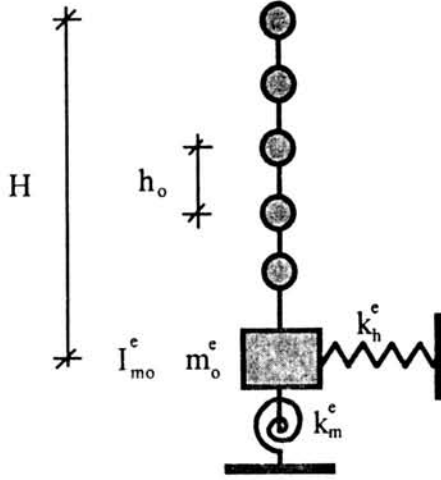


Fig 3  
Sistema idealizado  
estructura-cimentación-suelo

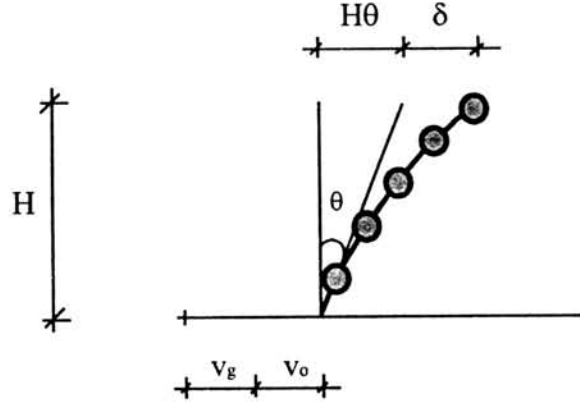


Fig 4  
Componentes de desplazamientos en el sistema  
idealizado estructura-cimentación-suelo

En el apéndice B se desarrolla un procedimiento simplificado para el análisis sísmico de una edificación de varios niveles sobre base flexible. En este desarrollo se considera que el sistema cimentación-suelo permanece en el intervalo elástico y que la superestructura puede tener un comportamiento no lineal. Además, una hipótesis básica empleada es suponer que la configuración de vibrar del edificio (tanto en el intervalo lineal como no lineal) tiene una forma cualquiera que no cambia durante la respuesta sísmica (esta hipótesis ha sido empleada anteriormente para el caso de base rígida; *Qi y Moehle, 1991; Rodríguez, 1994*). También se admite que se pueden despreciar las masas asociadas a la traslación y rotación en la cimentación (*Bielak, 1978*). En el apéndice B se demuestra que el empleo de estas hipótesis, así como de las ecuaciones de equilibrio del edificio en la condición de acoplamiento del desplazamiento lateral de la superestructura con los movimientos de rotación y traslación de la base, lleva a las siguientes tres ecuaciones (ecs B.13, B.34 y B.45, respectivamente, del apéndice B)

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + 2\xi^* \omega^* \dot{\delta} + \frac{R^*}{M^*} = 0 \quad (5)$$

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + \omega_h^{e^2} \gamma v_0 = 0 \quad (6)$$

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + \omega_m^{e^2} H^* \theta = 0 \quad (7)$$

Las ecs (5) a la (7) también se pueden interpretar como las ecuaciones de movimiento del sistema que aquí se denomina  $Q^*$ , el cual se ilustra en la fig 5. La inspección de estas ecuaciones muestra que la excitación traslacional del sistema  $Q^*$  es la del sistema estructura-cimentación-suelo amplificada por el factor  $\gamma$  (fig 6), parámetro que se define en el apéndice B. Los parámetros  $\xi^*$  y  $\omega^*$  son, respectivamente, la fracción de amortiguamiento crítico en el sistema  $Q^*$  y la frecuencia circular de este sistema en la condición de base rígida. Los



parámetros  $R^*$ ,  $M^*$  y  $H^*$  son las funciones de resistencia, masa y altura del sistema  $Q^*$  y se definen con detalle en el apéndice B. El desplazamiento lateral del sistema  $Q^*$ , respecto a su base, es  $\delta$ . Además, para llegar a las ecs (5) a la (7) se ha demostrado (apéndice B) que las frecuencias traslacional y rotacional del sistema cimentación-suelo de  $Q^*$ ,  $\omega_h^*$  y  $\omega_m^*$ , son iguales a  $\omega_h^e$  y  $\omega_m^e$ , respectivamente.

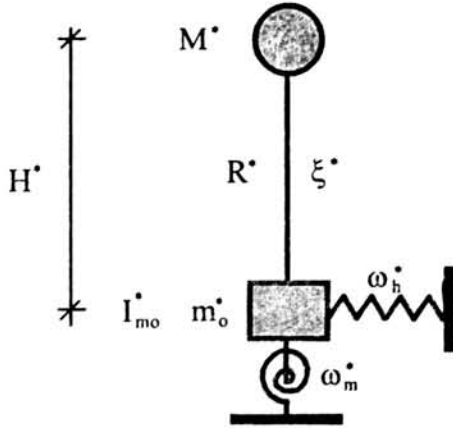


Fig 5. Sistema  $Q^*$

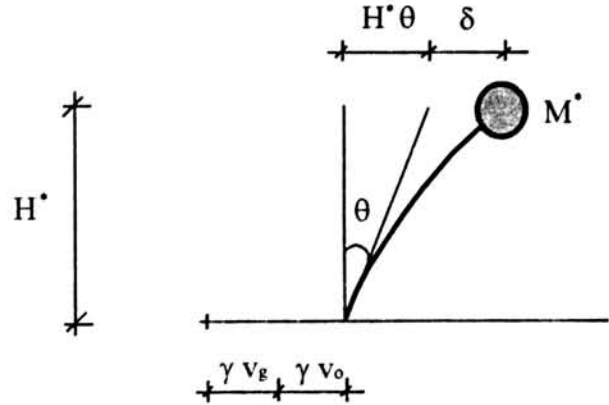


Fig 6  
Componentes de desplazamientos  
en el sistema  $Q^*$

La siguiente expresión se obtiene empleando la hipótesis de configuración de vibrar constante en el edificio de varios niveles sobre base rígida e igualando  $\mu$ ,  $\omega$  y  $\xi$  en el sistema de 1GDL asociado a  $u$ , a los parámetros correspondientes en el sistema  $Q^*$  (Qi y Moehle, 1991; Rodríguez, 1994).

$$\delta = \gamma u \quad (8)$$

Para fines del desarrollo siguiente, la altura del sistema  $Q^*$  se relaciona con la del sistema sencillo mediante

$$H^* = \gamma h \quad (9)$$

Con la ecuación anterior, en el apéndice B se demuestra que la ec (8) es la solución de las ecs (5) a la (7). La demostración se basa en que si se reemplaza la ec (8) en estas ecuaciones, y si se emplean las consideraciones mencionadas para relacionar el sistema de 1GDL asociado a  $u$  y el sistema  $Q^*$  (incluyendo el igualar los valores  $\omega_h$  y  $\omega_m$  en el sistema de 1GDL, a los valores  $\omega_h^e$  y  $\omega_m^e$  en el edificio en estudio, así como en la condición de base rígida igualando  $\omega$  a la frecuencia  $\omega^*$ ), se obtienen las ecs (1) a la (3). Lo anterior lleva a que si  $u$  es la solución de las ecuaciones acopladas (1) a (3), entonces la ec (8) es la solución de las ecuaciones acopladas (5) a (7).

### BASES DEL ESTUDIO PARAMÉTRICO EFECTUADO

Para intentar generalizar los resultados de esta investigación se efectuó un estudio paramétrico del problema, cuyas bases se describen en lo que sigue.

En la evaluación de las características dinámicas de edificios es frecuente el análisis de datos obtenidos en mediciones de la respuesta de edificios a movimientos sísmicos de diferentes intensidades. En estos estudios, la frecuencia fundamental del edificio sobre base flexible,  $\bar{\omega}^e$ , se puede relacionar con la frecuencia fundamental de la estructura en su condición de base rígida,  $\omega^e$ , por medio de la expresión

$$\frac{1}{\bar{\omega}^{e^2}} = \frac{1}{\omega^{e^2}} + \frac{1}{\omega_h^{e^2}} + \frac{1}{\omega_m^{e^2}} \quad (10)$$

Esta expresión es tomada en cuenta en los criterios de diseño sísmico que recomienda el *ATC3-06* (1978), así como por el reglamento de construcciones del Distrito Federal (*RCDF*, 1993).

Para efectuar un estudio paramétrico que emplee la ec (10) es necesario suponer que las frecuencias  $\bar{\omega}^*$  y  $\omega^*$  en el sistema  $Q^*$  son iguales, respectivamente, a  $\bar{\omega}^e$  y  $\omega^e$ . Además, es necesario contar con relaciones adicionales que involucren a los parámetros que intervienen en la referida ecuación. Con este fin se emplearon valores típicos de las relaciones  $\omega^e / \bar{\omega}^e$  y  $\omega_m^e / \omega_h^e$ . Estos valores se basaron en estudios de tipo experimental (*Murià et al*, 1993) o analíticos (*Bazán et al*, 1992; *Esteve y Mendoza*, 1989), efectuados empleando características típicas de edificaciones en la zona del antiguo lago de la ciudad de México. Con base en estos estudios, los valores empleados para las relaciones  $\omega_m^e / \omega_h^e$  y  $\omega^e / \bar{\omega}^e$  fueron 0.5 y 1.3, respectivamente. Se debe mencionar que una evaluación paramétrica rigurosa del problema debiera tomar en cuenta un intervalo amplio para la relación  $\bar{T}/T$ , con probables límites de 1.1 y 1.5. Sin embargo, el valor seleccionado en este estudio para  $\bar{T}/T$  está asociado a edificaciones con características de interés para esta investigación, lo que permite efectuar una evaluación global del comportamiento sísmico de estas edificaciones.

Para la solución numérica del problema se empleó el programa *DRAIN-2DX* (*Prakash et al*, 1993).

## ANÁLISIS DE RESULTADOS

La fig 7 muestra demandas de resistencia por unidad de masa,  $r/m$ , en el sistema de 1GDL con desplazamiento  $u$ , para los casos de base rígida y base flexible, considerando como abcisa el periodo fundamental de vibración del sistema estructura-cimentación-suelo,  $\bar{T}$ . La selección de este tipo de abcisa permite una comparación directa entre los espectros de los casos de estructuras sobre base flexible empleando  $\bar{T}$  y espectros del caso sobre base rígida con periodo  $T$ , lo que permite llegar, como se comenta posteriormente, a recomendaciones para efectuar el análisis de la respuesta sísmica del primer tipo de estructuras.

Los resultados de la fig. 7 y de las que se comentan posteriormente se obtuvieron empleando la componente EW del registro obtenido en la estación SCT en la ciudad de México el 19 de septiembre de 1985, considerando además las relaciones de ductilidad de desplazamiento,  $\mu$ , iguales a 1, 2, 4 y 8, y el valor de 0.05 para  $\xi$ . Estos resultados muestran que en un intervalo amplio de periodos de casos inelásticos, las demandas de resistencia obtenidas sobre base rígida con los periodos amplificados son menores que las demandas de resistencia correspondientes a los casos de base flexible. Una situación opuesta ocurre por lo general en el caso de respuesta elástica (fig 7). De acuerdo con la ec B.18 del apéndice B, el parámetro  $r/m$ , es directamente proporcional a la fuerza restauradora del sistema  $Q^*$ ,  $R^*$ , por

lo que es de esperar en este parámetro las mismas tendencias anteriormente descritas para las características de  $r/m$ .

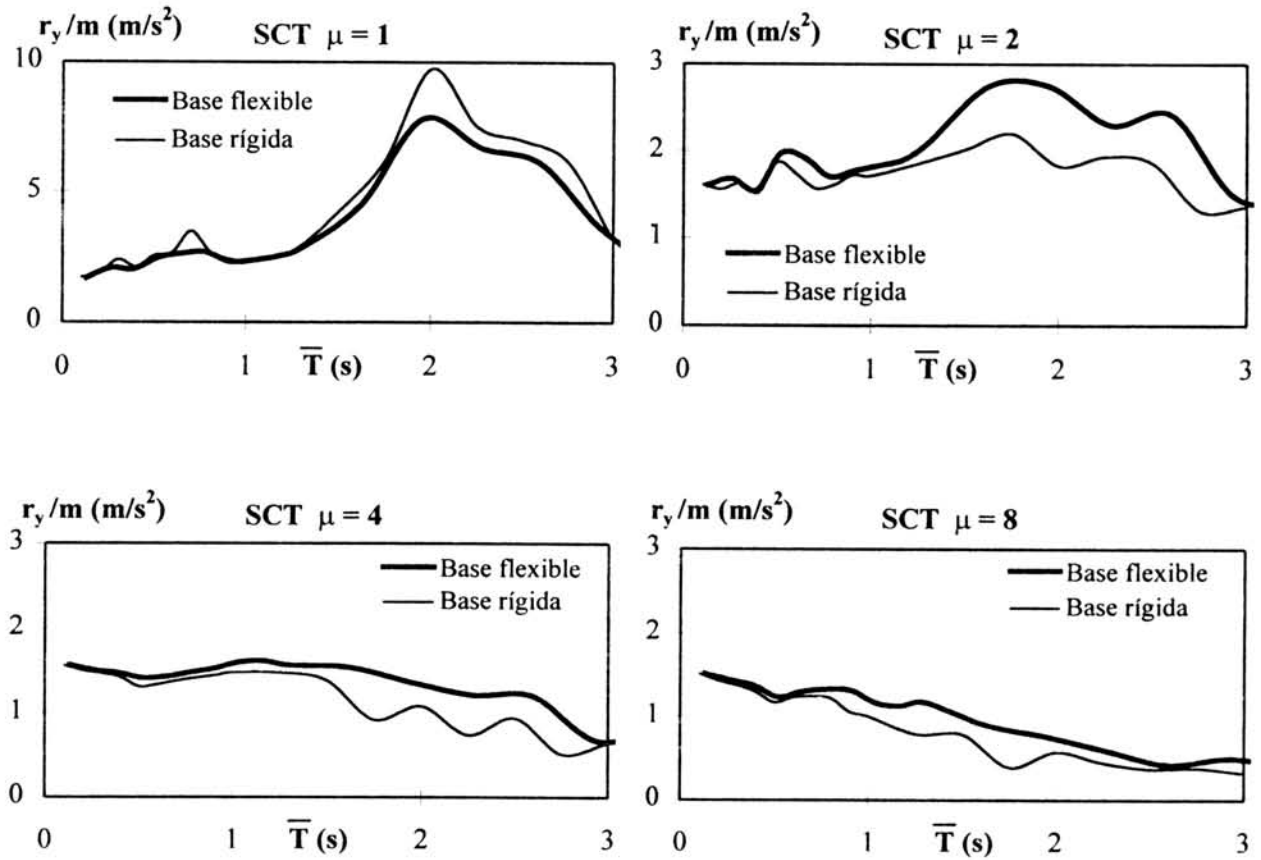


Fig 7. Demandas de resistencia por unidad de masa,  $r_y/m$ , en estructuras de 1GDL sobre base rígida y en sistemas sencillos suelo-estructura. Registro SCT.  $\mu = 1, 2, 4$  y  $8$ ;  $\xi = 0.05$  ( $\bar{T}$  = Periodo del sistema suelo-estructura)

La fig 8 muestra demandas de desplazamientos,  $u$ , para el sistema de 1GDL en la condición de base rígida y para el caso correspondiente sobre base flexible. El registro y los casos analizados son los mismos anteriormente comentados. Los resultados muestran que en un intervalo amplio de periodos, el caso sobre base rígida lleva a una estimación conservadora de los desplazamientos relativos en sistemas estructura-cimentación-suelo. Además, los resultados muestran que en la mayor parte de casos de respuesta inelástica, la diferencia de resultados empleando ambos sistemas no es significativa, lo que sugiere que los desplazamientos relativos inelásticos en sistemas estructura-cimentación-suelo se pueden evaluar de manera razonablemente conservadora empleando espectros de respuesta del caso sobre base rígida, considerando en éstos los periodos amplificados del sistema sobre base flexible. Resultados de este tipo han sido encontrados también por otros investigadores (Bazán et al, 1992).



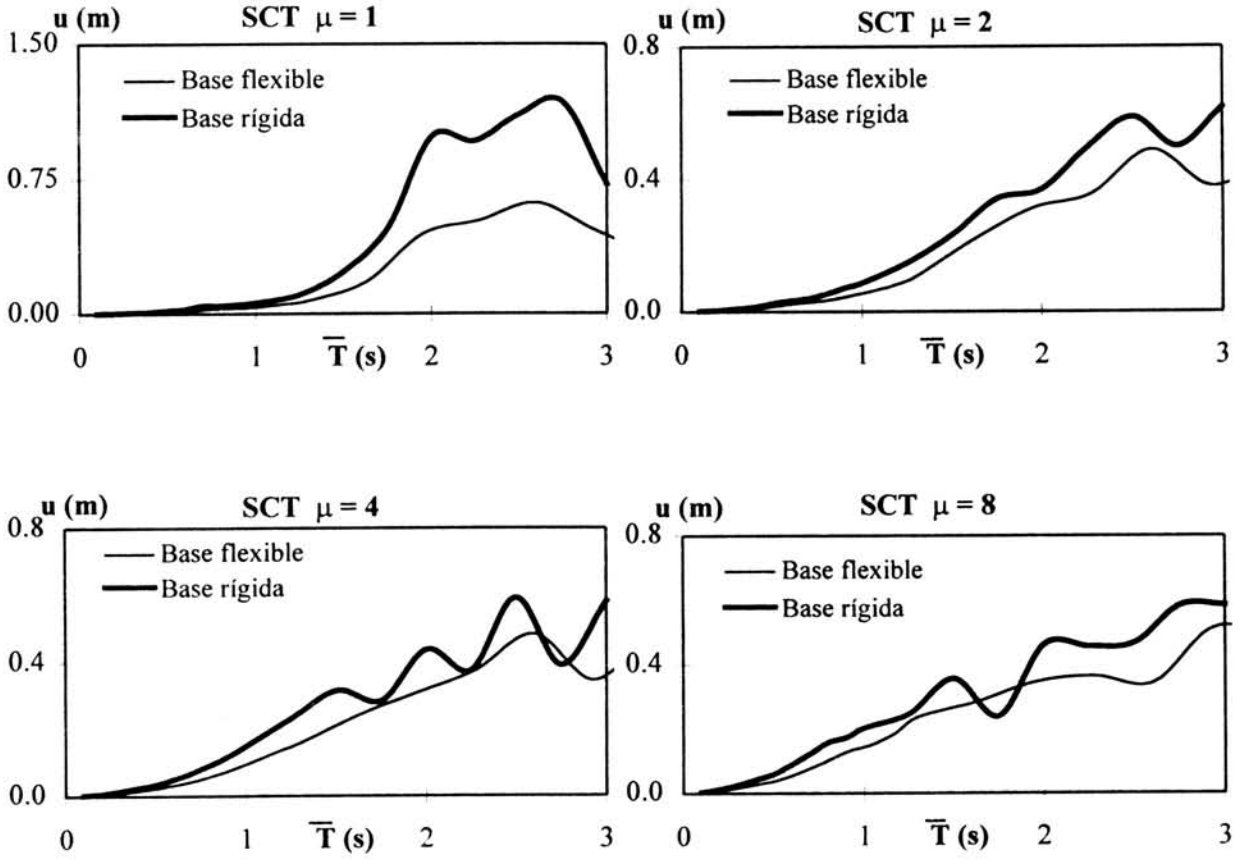


Fig 8. Demandas de desplazamientos,  $u_m$ , en estructuras de 1GDL sobre base rígida y en sistemas sencillos suelo-estructura. Registro SCT.  $\mu = 1, 2, 4$  y  $8$ ;  $\xi = 0.05$  ( $\bar{T}$  = Periodo del sistema suelo-estructura)

Con base en el uso de la ec (8), los resultados de la fig 8 se pueden emplear para evaluar el desplazamiento de la azotea del edificio en estudio respecto a su base,  $\delta$ . La relación entre este parámetro y la altura del edificio,  $H$ , es el denominado desplazamiento relativo global,  $D_{rm}$ , es decir

$$D_{rm} = \frac{\delta}{H} \quad (11)$$

Se han propuesto algunos procedimientos aproximados que permiten relacionar el desplazamiento relativo de entrepiso máximo,  $d_{rm}$ , y el parámetro  $D_{rm}$  (Sozen, 1997; Moehle, 1992), por lo que este parámetro es relevante para el análisis de daño por sismo en edificaciones a base de marcos. Con base en lo anterior, los resultados de la fig 8 indican que el cálculo de desplazamientos en una edificación de varios niveles sobre base flexible se puede llevar a cabo analizando a la estructura en la condición de base rígida, pero considerando que su periodo fundamental se incrementa por el efecto de la base flexible.

La fig 9 muestra resultados de evaluar espectros de energía histerética por unidad de masa,  $E_H$ , para el caso de sistemas de 1GDL con desplazamiento  $u$  sobre base rígida, y para

el caso del mismo sistema considerando base flexible. Para la construcción de estos espectros,  $E_H$  se evalúa al final del registro sísmico empleado y se grafica en función del periodo, amortiguamiento y relaciones de ductilidad de desplazamientos en el sistema. Como en el caso de los resultados de las figs 7 y 8, para el caso del sistema estructura-cimentación-suelo, la abscisa de la fig 9 representa el periodo de este sistema. El parámetro  $\xi$  se tomó igual a 0.05 y para  $\mu$  se consideraron los valores 2, 4 y 8. Los resultados muestran que en intervalos amplios de periodos, en la mayor parte de casos se pueden obtener estimaciones razonables de  $E_H$  en sistemas suelo-estructura empleando espectros de  $E_H$  para el caso sobre base rígida, considerando en éstos el periodo amplificado del sistema suelo-estructura. Sin embargo, en estructuras poco dúctiles y con periodos amplificados menores que el dominante del terreno, como el caso de  $\mu$  igual a dos, fig 9, el procedimiento que aquí se sugiere puede llevar a estimaciones muy conservadoras.

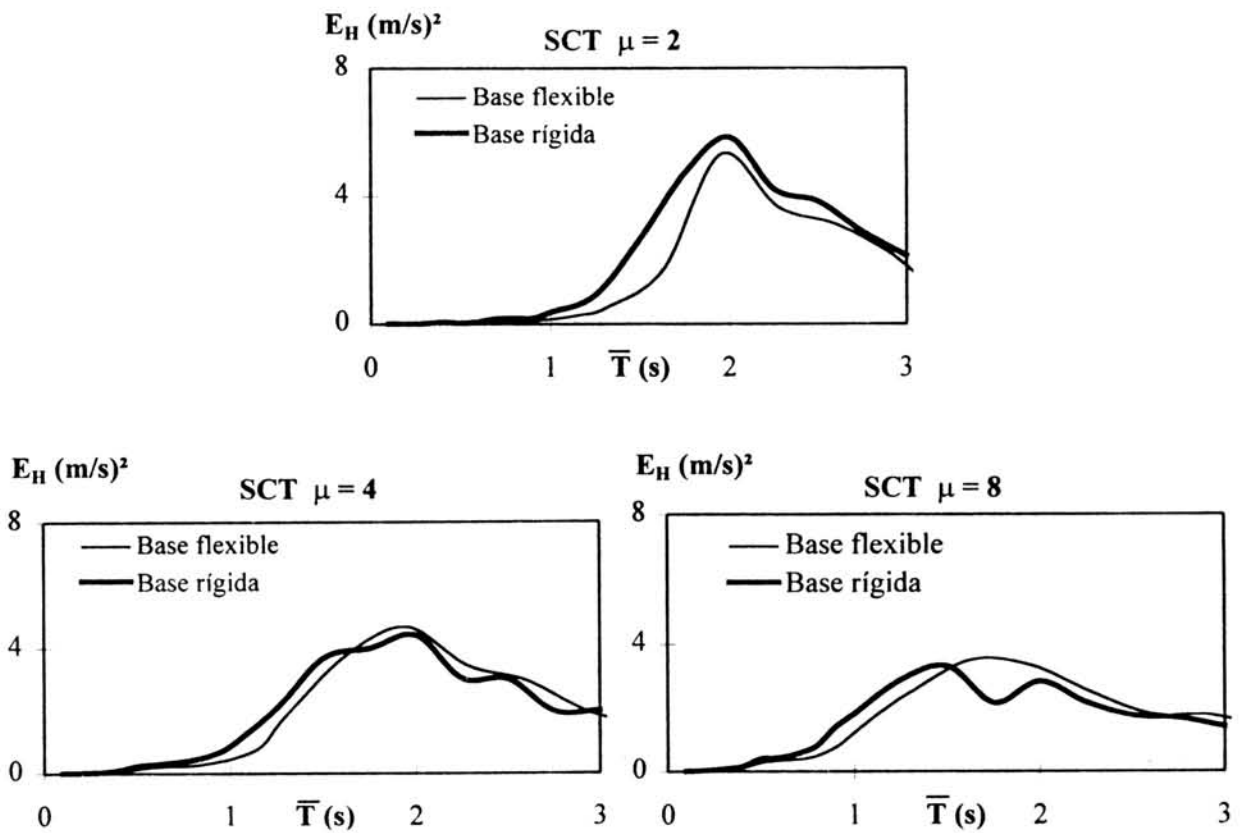


Fig 9. Demandas de energía histerética por unidad de masa,  $E_H$ , en estructuras de 1GDL sobre base rígida y en sistemas sencillos suelo-estructura. Registro SCT.  $\mu = 2, 4$  y 8;  $\xi = 0.05$  ( $\bar{T}$  = Periodo del sistema suelo-estructura)

### Evaluación de un parámetro de daño por sismo en edificios

Se ha propuesto un parámetro para evaluar el daño por sismo en edificaciones,  $I_D$ , el cual ha sido descrito con detalle en la literatura (Rodríguez, 1994) por lo que sólo se describe brevemente en lo que sigue. El parámetro  $I_D$  se define como

$$I_D = \frac{E_H^*}{E_\lambda^*} \quad (12)$$

Los parámetros  $E_H^*$  y  $E_\lambda^*$  son energías histerética y de deformación elástica, respectivamente, correspondientes al sistema Q\* sobre base rígida.  $E_H^*$  se evalúa mediante

$$E_H^* = \gamma^2 E_H \quad (13)$$

El parámetro  $E_\lambda^*$  se evalúa con la expresión siguiente

$$E_\lambda^* = (2\pi \lambda h_0 D_{rd})^2 \quad (14)$$

Donde  $\lambda$  interviene en la evaluación aproximada del periodo fundamental,  $T$ , de un edificio de  $N$  niveles en la condición de base rígida, mediante

$$T = \frac{N}{\lambda} \quad (15)$$

En el caso de marcos sobre base rígida, se ha sugerido para  $\lambda$  el valor de 7 (Rodríguez y Montes, 1997).

El parámetro  $D_{rd}$  es el desplazamiento relativo global que se considera aceptable en un terremoto, asociado al desplazamiento de la azotea  $\delta_d$ , es decir

$$D_{rd} = \frac{\delta_d}{H} \quad (16)$$

un valor comúnmente aceptado para  $D_{rd}$  en estructuras de concreto reforzado es 0.01 (Rodríguez, 1994).

Combinando las ecs (12) a la (14) se obtiene

$$I_D = \frac{\gamma^2 E_H}{(2\pi \lambda h_0 D_{rd})^2} \quad (17)$$

En el apéndice C se ha demostrado que el parámetro  $E_H^*$  en el sistema Q\*, correspondiente a una edificación de varios niveles sobre base flexible, se puede evaluar con la ec (13), donde en este caso el parámetro  $E_H$  es la energía histerética por unidad de masa disipada por el sistema sencillo estructura-cimentación-suelo descrito en el apéndice A. Si tomamos en cuenta esta característica, y de acuerdo con la ec (17), para un tipo de estructuración específico y para un valor específico de  $D_{rd}$ ,  $I_D$  podría considerarse directamente proporcional a la energía histerética disipada por el sistema sencillo estructura-cimentación-suelo,  $E_H$ , lo que pone en evidencia la relevancia de este parámetro para el análisis del daño por sismo en edificios.

Siguiendo el procedimiento mencionado de evaluación del parámetro  $I_D$ , la fig 10 muestra resultados de evaluar este parámetro en edificaciones a base de marcos sobre base rígida y base flexible. Los valores empleados para  $\gamma$  y  $\lambda$  fueron 1.5 y 7, respectivamente, y para  $h_0$  y  $D_{rd}$  los valores 270 cm y 0.01, respectivamente (Rodríguez y Montes, 1997). Dada la proporcionalidad anteriormente comentada entre  $E_H$  e  $I_D$ , las diferencias relativas en este parámetro para los casos de base flexible y base rígida son las mismas que las anteriormente mencionadas para  $E_H$  en ambos casos.

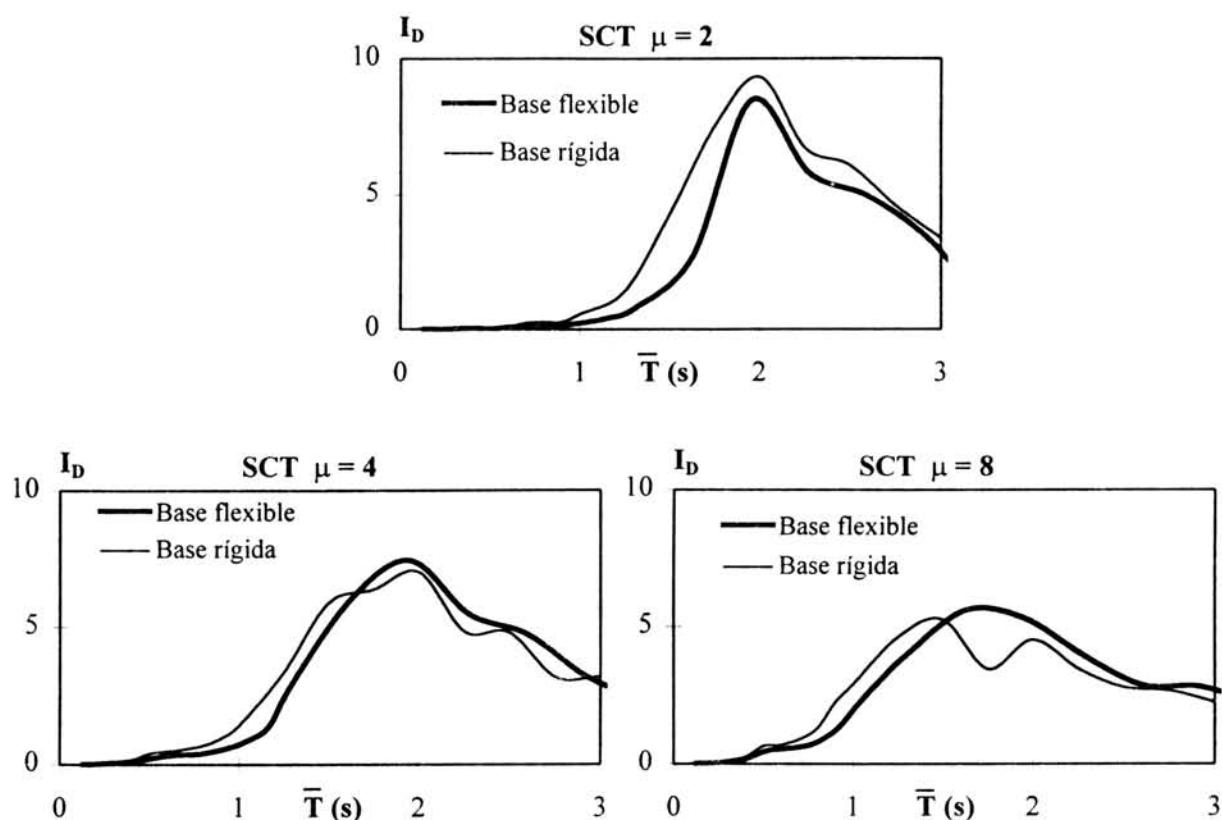


Fig 10. Demandas del parámetro  $I_D$  en edificios de varios niveles, estructurados a base de marcos, sobre base rígida y flexible. Registro SCT.  $\mu = 2, 4$  y  $8$ .  $\xi = 0.05$   
( $\bar{T}$  = período del sistema suelo-estructura)

De acuerdo con los resultados de las figs 9 y 10, para los casos de  $\mu$  igual a 2 y 4, el parámetro de evaluación de daño  $I_D$  se puede evaluar de manera conservadora en la mayor parte de casos, o con márgenes no muy grandes del lado de la inseguridad en otros casos, si se usan espectros de este parámetro para el caso de base rígida, pero empleando para las abscisas de estos espectros, los valores del periodo fundamental del edificio amplificado por el efecto de base flexible.

Los valores que en esta investigación se obtienen para los parámetros  $\delta$  e  $I_D$ , para los casos con base rígida y base flexible, muestran que en la mayor parte de casos de edificios de varios niveles sobre base flexible, el análisis de daño por sismo se puede efectuar considerando el caso sobre base rígida, empleando el periodo amplificado del sistema estructuración-suelo correspondiente. Sin embargo, se debe tener cuidado en extrapolar este procedimiento para evaluar el daño por sismo producido por choque entre edificios, ya que este tipo de daño tiene características diferentes al aquí estudiado. En el daño por choque en edificios interviene no solo el desplazamiento estructural en edificaciones respecto a su base, por ejemplo  $\delta$ , sino también la contribución de la rotación de la base del edificio a los desplazamientos totales en la estructura, lo que no ha sido objeto de este estudio.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio paramétrico de las características de los efectos de la respuesta sísmica inelástica de sistemas estructura-cimentación-suelo, para lo cual se ha empleado un procedimiento simplificado de análisis. Los resultados encontrados en el análisis de la respuesta sísmica global de edificaciones sobre base flexible y rígida muestran que en un intervalo amplio de periodos de edificios de varios niveles sobre base flexible, representativos de los desplantados sobre la antigua zona del lago de la ciudad de México, las demandas de desplazamientos relativos y de energía histerética en este tipo de sistemas se pueden evaluar empleando resultados del caso sobre base rígida, para lo cual es necesario emplear el periodo amplificado correspondiente del caso sobre base flexible. Los resultados encontrados también muestran que es razonable seguir un procedimiento similar para efectuar el análisis aproximado de daño por sismo en edificaciones sobre base flexible.

## AGRADECIMIENTO

Se agradece a la Dirección General de Asuntos de Personal Académico de la UNAM, por el patrocinio a esta investigación.

## REFERENCIAS

- Applied Technology Council* (1978), "Tentative provisions for the development of seismic regulations for buildings", ATC3-06, Junio.
- Bazán E., Diaz I., Bielak J. y Bazán N. (1992), "Probabilistic Seismic Response of Inelastic Building Foundation Systems", Proceedings of the Tenth World Conference on Earthquake Engineering, Madrid, España, Balkema, Rotterdam, 1559-1565.
- Bielak J. (1978), "Dynamic Response of Non-linear Building-Foundation Systems", Earthq. Engr. & Struct. Dyn., Vol 6, 17-30.
- Esteva L. y Mendoza E. (1989), "Influencia de la interacción suelo-estructura en la respuesta sísmica inelástica de edificios", informe del proy. 6704, Instituto de Ingeniería.
- Luco J., Trifunac M. y Wong H. (1987), "On the Apparent Change in Dynamic Behavior of a Nine-story Reinforced Concrete Building", Bull. of the Seism. Soc. of America, 6, 1961-1983.
- Meek J. y Wolf J. (1991), "Insights on cutoff frequency for foundation on soil layer". Earthq. Engr. & Struct. Dyn., Vol. 20, 651-665.
- Moehle J. (1992), "Displacement-based Design of RC Structures Subjected to Earthquakes" Earthquake Spectra, Vol 8, No. 3, 403-428.
- Murià D. y Moreno S. (1993), "Identificación de las propiedades dinámicas mediante vibración ambiental". Memorias del X Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, México.
- Newmark N. y Rosenblueth E. (1971), "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice Hall.



- Prakash, V; Powell G. H. y Campell S. (1993), "Drain-2DX, Base Program Description and User Guide" Report No. UCB/SEM-N-93/17, Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, California.
- Qi X. y Moehle J. (1991), "Displacement Design Approach for Reinforced Concrete Subjected to Earthquakes". Publicación UCB/EERC-91/02. EERC, University of California, Berkeley.
- Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (RCDF, 1993), Gaceta Oficial del Departamento del Distrito Federal.
- Rodríguez M. (1994), "A Measure of the Capacity of Earthquake Ground Motions to Damage Structures". Earthq. Engr. & Struct. Dyn., Vol 23, No. 6, 627-643.
- Rodríguez M. y Montes R. (1997), "Análisis sísmico no lineal aproximado de edificaciones con base flexible ó con pérdida de adherencia en la base". Por publicar en la Serie Azul del Instituto de Ingeniería, UNAM.
- Veletsos A. (1977), "Dynamics of structure-foundation systems". En Structural and Geotechnical Mechanics, ed W.J. Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 333-361.
- Sozen M. (1997), "Drift-Driven Design for Earthquake Resistance of Reinforced Concrete" Publicación UCB/EERC-97/05, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
- Wallace J. y Moehle J. (1990), "Evaluation of ATC requirements for Soil-Structure Interaction Using Data from the 3 March 1985 Chile Earthquake", Earthquake Spectra, Vol. 6, No. 3, 593-611.
- Zahrah T. y Hall W. J. (1984), "Earthquake Engineering Absorption in SDOF Structures", Journal Structural Engineering, ASCE, Vol. 110, 1757-1772.

## Apéndice A

### Análisis de un sistema sencillo estructura-cimentación-suelo

En lo siguiente se considera que la superestructura puede incursionar en el intervalo inelástico y que el sistema cimentación-suelo permanece en el intervalo elástico lineal. No se toma en cuenta el amortiguamiento en este sistema (fig 1), lo que como se comenta en el texto, posteriormente se corrige al emplear un amortiguamiento efectivo del sistema estructura-cimentación-suelo.

Del equilibrio de fuerzas horizontales en el nivel superior (fig 2) se obtiene

$$\ddot{u} + \ddot{v}_g + \ddot{v}_0 + h\ddot{\theta} + 2\xi\omega\dot{u} + \frac{r}{m} = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde

- $u$  es el desplazamiento horizontal de la superestructura en el nivel superior relativo a su base.
- $v_g$  es el desplazamiento de campo libre del terreno.
- $v_0$  representa el desplazamiento en la base de la estructura por efecto de interacción.
- $h$  es la altura del modelo de un grado de libertad.

- $\theta$  define la rotación en la base de la estructura por efecto de interacción.  
 $r$  representa la fuerza restauradora del sistema.  
 $m$  es la masa del sistema.  
 $\xi$  es la fracción de amortiguamiento crítico del sistema.  
 $\omega$  es la frecuencia circular de vibración de la estructura sobre base rígida.

En el caso elástico el termino  $r/m$  se puede evaluar con

$$\frac{r}{m} = \omega^2 u \quad (\text{A.2})$$

Por tanto en el rango elástico se tiene, reemplazando A.2 en A.1

$$\ddot{u} + \ddot{v}_g + \ddot{v}_0 + h\ddot{\theta} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0 \quad (\text{A.3})$$

Si se considera el equilibrio de fuerzas horizontales incluyendo la base se obtiene

$$\ddot{u} + \ddot{v}_g + \ddot{v}_0 + h\ddot{\theta} + \frac{m_0}{m}(\ddot{v}_g + \ddot{v}_0) + \frac{k_h v_0}{m} = 0 \quad (\text{A.4})$$

En la expresión anterior  $m_0$  representa la masa asociada a la traslación en el sistema cimentación-suelo y  $k_h$  es la rigidez equivalente de este sistema.

Tomando momentos con respecto a la base de la estructura de obtiene:

$$\ddot{u} + \ddot{v}_g + \ddot{v}_0 + h\ddot{\theta} + \frac{I_{m0}}{mh}\ddot{\theta} + \frac{k_m}{mh}\theta = 0 \quad (\text{A.5})$$

donde  $I_{m0}$  es la masa rotacional del sistema cimentación-suelo y  $k_m$  es la rigidez angular de este sistema.

El parámetro  $\omega_h$  define la frecuencia circular de vibración de traslación en el sistema cimentación-suelo, considerando a la superestructura como infinitamente rígida, sin posibilidad de rotación en la base. El parámetro  $\omega_m$  es la frecuencia circular de vibración de cabeceo en el sistema cimentación-suelo, considerando a la superestructura como infinitamente rígida, sin posibilidad de traslación en la base.

De acuerdo con las definiciones de las frecuencias  $\omega_h$  y  $\omega_m$ , se puede escribir

$$\omega_h^2 = \frac{k_h}{(m + m_0)} \quad (\text{A.6})$$

$$\omega_m^2 = \frac{k_m}{(mh^2 + I_{m0})} \quad (\text{A.7})$$

## Apéndice B

### Análisis de edificios de varios niveles sobre base flexible

En el desarrollo siguiente se considera que el sistema cimentación-suelo tiene un comportamiento elástico lineal y sin amortiguamiento, y que la superestructura de  $N$  niveles (fig 3) puede tener un comportamiento inelástico. Como se comenta en el texto, posteriormente se emplea un amortiguamiento efectivo del sistema estructura-cimentación-suelo.

## B.1

### Equilibrio de fuerzas horizontales en la superestructura

Del equilibrio de fuerzas horizontales en la superestructura del sistema que se muestra en la fig 4 se obtiene

$$[M]\left[\ddot{U}\right] + \{1\}\ddot{v}_g + \{1\}\ddot{v}_0 + \{H\}\ddot{\theta} + [C]\{\dot{U}\} + \{R\} = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde

$[M]$  matriz de masas de la superestructura.

$\{U\}$  vector de desplazamientos laterales de la superestructura relativos a su base.

$\{1\}$  vector de  $N$  elementos iguales a 1.

$\{H\}$  es un vector cuyos elementos representan la altura relativa a la base de la estructura para cada uno de los niveles de la misma.

$[C]$  matriz de amortiguamiento de la superestructura, la cual se considera constante.

$\{R\}$  vector de fuerzas restauradoras de la superestructura.

En este estudio se emplea la hipótesis de una configuración única de vibrar  $\{\phi\}$ , con lo cual es posible escribir

$$\{U\} = \{\phi\} \delta \quad (\text{B.2})$$

en la expresión anterior  $\delta$  es el desplazamiento lateral en el último nivel de la estructura relativo a su base.

Reemplazando la ec B.2 en la ec B.1 y premultiplicando ésta por la traspuesta de  $\{\phi\}$  se obtiene

$$\begin{aligned} &\{\phi\}^T [M] \{\phi\} \ddot{\delta} + \{\phi\}^T [M] \{1\} \ddot{v}_g + \{\phi\}^T [M] \{1\} \ddot{v}_0 + \{\phi\}^T [M] \{H\} \ddot{\theta} + \\ &\{\phi\}^T [C] \{\phi\} \dot{\delta} + \{\phi\}^T \{R\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Se definen los siguientes parámetros

$$M^* = \{\phi\}^T [M] \{\phi\} \quad (\text{B.4})$$

$$L^* = \{\phi\}^T [M] \{1\} \quad (\text{B.5})$$

$$J_1^* = \{\phi\}^T [M] \{H\} \quad (\text{B.6})$$

$$C^* = \{\phi\}^T [C] \{\phi\} \quad (\text{B.7})$$

$$R^* = \{\phi\}^T \{R\} \quad (\text{B.8})$$

Reemplazando las ecuaciones B.4 a B.8 en B.3 se obtiene

$$M^* \ddot{\delta} + L^* \ddot{v}_g + L^* \ddot{v}_0 + J_1^* \ddot{\theta} + C^* \dot{\delta} + R^* = 0 \quad (\text{B.9})$$

Se definen también los siguientes parámetros

$$\gamma = L^*/M^* \quad (\text{B.10})$$

$$H^* = J_1^*/M^* \quad (\text{B.11})$$

$$C^*/M^* = 2\xi^* \omega^* \quad (\text{B.12})$$

Dividiendo la ec B.9 entre  $M^*$  y reemplazando las ecs B.10, B.11 y B.12 en aquella se obtiene:

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + 2\xi^* \omega^* \dot{\delta} + \frac{R^*}{M^*} \delta = 0 \quad (B.13)$$

Se puede observar, por analogía con la ec A.1 (apéndice A), que la expresión B.13 representa la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontales en el nivel superior de una estructura equivalente sobre base flexible, la que en la condición de base rígida se comporta como una estructura de un grado de libertad (1GDL), en adelante a esta estructura equivalente se le denomina sistema  $Q^*$ . En este sistema se definen los siguientes parámetros:  $\delta$  es el desplazamiento lateral de la estructura relativo a su base,  $\gamma v_g$  es el desplazamiento del terreno en campo libre,  $\gamma v_0$  es el desplazamiento de traslación en la cimentación por efecto de interacción con el suelo,  $H^*$  es la altura de este sistema. Los parámetros  $C^*$ ,  $\omega^*$  y  $\xi^*$  son el coeficiente de amortiguamiento, la frecuencia circular de vibración sobre base rígida y la fracción de amortiguamiento crítico, respectivamente en el sistema  $Q^*$ . El parámetro  $R^*$  es la fuerza restauradora y  $M^*$  la masa de la superestructura del sistema  $Q^*$ .

*Solución de la ecuación B.13 en el intervalo elástico ( $\delta < \delta_y$ )*

En el intervalo elástico se puede considerar que

$$R^*/M^* = \omega^{*2} \delta \quad (B.14)$$

Reemplazando la ec B.14 en la ec B.13 se obtiene

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + 2\xi^* \omega^* \dot{\delta} + \omega^{*2} \delta = 0 \quad (B.15)$$

En el caso de base rígida, el parámetro  $\delta$  y el desplazamiento espectral están relacionados mediante (Qi y Moehle, 1991)

$$\delta = \gamma u \quad (B.16)$$

La altura del sistema  $Q^*$  se puede relacionar con la del sistema sencillo mediante

$$H^* = \gamma h \quad (B.17)$$

En lo que sigue se demuestra la validez de la ec B.16 como solución de la ec B.15. La demostración sigue un procedimiento similar al empleado por Rodríguez (1994) para el caso de base rígida. En el caso en estudio, la demostración se basa en suponer que la frecuencia y fracción de amortiguamiento crítico del sistema sencillo definido en el apéndice A,  $\omega$  y  $\xi$ , respectivamente, son iguales a los parámetros correspondientes en el sistema  $Q^*$ . Si además se combinan las ecs B.15 a la B.17, se obtiene la ec A.3, lo que demuestra que si  $u$  es la solución de la ec A.3,  $\gamma u$  es la solución de la ec B.15.

Combinando las ecs A.2, B.14 y B.16 se obtiene además

$$\frac{R^*}{M^*} = \gamma \frac{r}{m} \quad (B.18)$$

Por otro lado, en el límite elástico, a partir de la ec B.16 se puede relacionar  $\delta_y$  y  $u_y$  mediante

$$\delta_y = \gamma u_y \quad (B.19)$$

*Solución de la ecuación B.13 en el intervalo inelástico*

Para la solución de la ec B.13 en el intervalo inelástico, se considera que la ductilidad de desplazamiento relativo a la base de la estructura de varios grados de libertad (medido en función de  $\delta$ ) es igual a la ductilidad de desplazamiento relativo en la estructura sencilla sobre base flexible con la que se pretende relacionar, es decir

$$\frac{\delta_m}{\delta_y} = \frac{u_m}{u_y} \quad (B.20)$$

En la ecuación anterior el subíndice  $m$  indica valores máximos.

Si se combinan las ecs B.19 y B.20 se obtiene la expresión B.16. Esto demuestra que si  $u$  es la solución de la ecuación no lineal A.1,  $\gamma u$  sería la solución de la ec B.13 en el intervalo inelástico.

Si se reemplaza la ec B.18 en la ec B.13 se obtiene

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + 2\xi^* \omega^* \dot{\delta} + \gamma \frac{r}{m} = 0 \quad (B.21)$$

La comparación de las ecs B.21 y A.1 muestra que con la igualdad de los parámetros asociados al amortiguamiento y frecuencia que intervienen en estas ecuaciones, así como si se considera la ec B.17, se tendrá que la solución de la ec B.21 está dada por la expresión B.16, lo que demostraría que la ec B.18 es también válida en el intervalo no lineal y que por tanto otra forma de la ec B.13 es la ec B.21.

## B.2

### Equilibrio de fuerzas horizontales incluyendo la base

Del equilibrio de fuerzas horizontales, incluyendo la base en el sistema que se muestra en las figs 3 y 4, se obtiene

$$\{1\}^T [M] [\ddot{U}] + \{1\} \ddot{v}_g + \{1\} \ddot{v}_0 + \{H\} \ddot{\theta} + m_0^e (\ddot{v}_g + \ddot{v}_0) + k_h^e v_0 = 0 \quad (B.22)$$

donde  $k_h^e$  y  $m_0^e$  son, respectivamente, la rigidez y la masa asociadas a la traslación en el sistema cimentación-suelo.

Reemplazando B.2 en B.22 se tiene

$$\{1\}^T [M] \{\phi\} \ddot{\delta} + \{1\}^T [M] \{1\} \ddot{v}_g + \{1\}^T [M] \{1\} \ddot{v}_0 + \{1\}^T [M] \{H\} \ddot{\theta} + m_0^e (\ddot{v}_g + \ddot{v}_0) + k_h^e v_0 = 0 \quad (B.23)$$

La masa total de la superestructura,  $M_T$ , se evalúa con

$$M_T = \{1\}^T [M] \{1\} \quad (B.24)$$

Se define el parámetro  $J_2^*$

$$J_2^* = \{1\}^T [M] \{H\} \quad (B.25)$$

Reemplazando B.5, B.24 y B.25 en B.23 y dividiendo esta última entre  $L^*$  se obtiene



$$\ddot{\delta} + \frac{M_T}{L^*} \ddot{v}_g + \frac{M_T}{L^*} \ddot{v}_0 + \frac{J_2^*}{L^*} \ddot{\theta} + \frac{m_0^e}{L^*} (\ddot{v}_g + \ddot{v}_0) + \frac{k_h^e}{L^*} v_0 = 0 \quad (B.26)$$

Además se acepta la validez de las siguientes aproximaciones (Luco et al, 1987)

$$M_T \cong \gamma^2 M^* \quad (B.27)$$

$$J_2^* \cong \gamma H^* M^* \quad (B.28)$$

Reemplazando estas dos últimas expresiones en B.26, considerando además B.10 se obtiene

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + \frac{m_0^e}{\gamma M^*} (\ddot{v}_g + \ddot{v}_0) + \frac{k_h^e}{\gamma^2 M^*} \gamma v_0 = 0 \quad (B.29)$$

La expresión anterior muestra que se puede considerar que el sistema  $Q^*$  está sometido a una excitación traslacional en su base definida por los parámetros  $\gamma v_g$  y  $\gamma v_0$ . Si además se desprecia las masas asociadas a la traslación y rotación en la base del sistema  $Q^*$  (Bielak, 1978), la frecuencia circular de traslación de su sistema cimentación-suelo,  $\omega_h^*$ , se puede definir a partir de la ec B.29, de lo que se obtiene

$$\omega_h^{*2} = \frac{k_h^e}{\gamma^2 M^*} \quad (B.30)$$

Combinando B.29 y B.30, y eliminando el término asociado a  $m_0^e$  se obtiene

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + \omega_h^{*2} \gamma v_0 = 0 \quad (B.31)$$

La frecuencia traslacional de vibrar del sistema cimentación-suelo de un edificio,  $\omega_h^e$ , cuando se ignoran las masas asociadas a este sistema, se puede evaluar como

$$\omega_h^{e2} = \frac{k_h^e}{M_T} \quad (B.32)$$

El empleo de la ec B.27 y la combinación de las ecs B.30 y B.32 permite establecer

$$\omega_h^e = \omega_h^* \quad (B.33)$$

Combinando la ec B.33 en B.31 lleva a

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + \omega_h^{e2} \gamma v_0 = 0 \quad (B.34)$$

Si  $\omega_h^e$  es igual a  $\omega_h$ , y si además se considera la ec B.17, al combinar las ecs B.16 y B.34 se obtiene la ec 2 del texto, lo que demuestra que si  $u$  es la solución de la ec 2, entonces  $\gamma u$  es la solución de la ec B.34.

### B.3

#### Equilibrio de momentos con respecto a la base

Del equilibrio de momentos con respecto a la base del sistema que se muestra en las figs 3 y 4 se obtiene

$$\{H\}^T [M] \left[ \{\ddot{U}\} + \{1\} \ddot{v}_g + \{1\} \ddot{v}_0 + \{H\} \ddot{\theta} \right] + I_{m0}^e \ddot{\theta} + k_m^e \theta = 0 \quad (B.35)$$

donde  $k_m^e$  e  $I_{m0}^e$  son, respectivamente, la rigidez y masa asociadas a la rotación del sistema cimentación-suelo del edificio en estudio.

Combinando B.2 y B.35 se obtiene

$$\{H\}^T [M] \{\phi\} \ddot{\delta} + \{H\}^T [M] \{1\} \ddot{v}_g + \{H\}^T [M] \{1\} \ddot{v}_0 + \{H\}^T [M] \{H\} \ddot{\theta} + I_{m0}^e \ddot{\theta} + k_m^e \theta = 0 \quad (B.36)$$

Se define el parámetro  $J_3^*$

$$J_3^* = \{H\}^T [M] \{H\} \quad (B.37)$$

Reemplazando las ecs B.6, B.25 y B.37 en la ec B.36 y dividiendo esta última entre  $J_1^*$

$$\ddot{\delta} + \frac{J_2^*}{J_1^*} \ddot{v}_g + \frac{J_2^*}{J_1^*} \ddot{v}_0 + \frac{J_3^*}{J_1^*} \ddot{\theta} + \frac{I_{m0}^e}{J_1^*} \ddot{\theta} + \frac{k_m^e}{J_1^*} \theta = 0 \quad (B.38)$$

Se acepta la validez de la siguiente aproximación (Luco et al, 1987)

$$J_3^* \cong M^* H^{*2} \quad (B.39)$$

Empleando las aproximaciones dadas por las ecs B.28, B.39 y la ecuación B.11 en la ecuación B.38 se obtiene

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + \frac{I_{m0}^e}{H^* M^*} \ddot{\theta} + \frac{k_m^e}{H^* M^*} \theta = 0 \quad (B.40)$$

Como el caso de la sección B.2 analizado, la expresión anterior muestra que el sistema  $Q^*$  está sometido a la excitación traslacional en la edificación multiplicada por el factor  $\gamma$ , es decir  $\gamma v_g$  y  $\gamma v_0$ . Si además se desprecia las masas asociadas a la traslación y rotación del sistema cimentación-suelo (Bielak, 1978), la frecuencia circular de rotación de la cimentación-suelo del sistema  $Q^*$ ,  $\omega_m^*$  se puede definir a partir de la ec B.40, de la que se obtiene

$$\omega_m^{*2} = \frac{k_m^e}{M^* H^{*2}} \quad (B.41)$$

La frecuencia circular de rotación del sistema cimentación-suelo del edificio, cuando se ignoran las masas asociadas al sistema cimentación-suelo del sistema,  $\omega_m^e$ , se puede evaluar a partir de las ecs B.36 y B.37, por lo que se puede escribir

$$\omega_m^{e2} = \frac{k_m^e}{J_3^*} \quad (B.42)$$

Combinando B.42 y la aproximación a  $J_3^*$  dada por la B.39 se obtiene

$$\omega_m^{e2} = \frac{k_m^e}{M^* H^{*2}} \quad (B.43)$$

De B.41 y B.43 se obtiene

$$\omega_m^e = \omega_m^* \quad (B.44)$$

Combinando las ecs B.40, B.41 y B.44, y eliminando el termino asociado a  $I_{m0}^e$  se llega a la siguiente expresión

$$\ddot{\delta} + \gamma \ddot{v}_g + \gamma \ddot{v}_0 + H^* \ddot{\theta} + \omega_m^{e2} H^* \theta = 0 \quad (B.45)$$

Se puede observar que la ec B.45 es análoga a la ec 3 del texto y representa la ecuación de equilibrio de momentos con respecto a la base de la estructura en el sistema  $Q^*$ .

Es posible demostrar que la ec B.16 describe la solución de B.45, para lo cual se debe cumplir que  $\omega_m^e$  y  $\omega_m$  son iguales, y considerar la ec B.17. Con este criterio, al combinar las ecs B.16 y B.45 se obtiene la ec 3 del texto, lo que demuestra que si  $u$  es la solución de esta ecuación, entonces  $\gamma u$  es la solución de la ec B.45.

En la fig 5 se muestra el sistema  $Q^*$  resultante, y en la fig 6 la posición deformada de la estructura en dicho sistema.

## Apéndice C

### Análisis de energías en edificios de varios niveles sobre base flexible

Siguiendo un procedimiento similar al empleado por *Rodríguez* (1994), es posible demostrar que en el caso de sistemas sobre base flexible existe una relación entre la energía histerética disipada por el sistema de 1GDL descrito en el apéndice A y la energía histerética disipada por el sistema  $Q^*$ , lo que se desarrolla a continuación.

La suma de la energía histerética por unidad de masa de un sistema de 1GDL sobre base rígida ( $E_H$ ) más la energía de deformación elástica ( $E_S$ ) está dada por (*Zahrah y Hall*, 1984)

$$E_H + E_S = \int \frac{r}{m} du \quad (C.1)$$

La integración de la ecuación del sistema equivalente al sistema del edificio de base flexible, ec B.21, con respecto a  $d\delta$  lleva a

$$\int \ddot{\delta} d\delta + \int \gamma \ddot{v}_g d\delta + \int \gamma \ddot{v}_0 d\delta + \int H^* \ddot{\theta} d\delta + 2\xi^* \omega^* \int \dot{\delta} d\delta + \int \gamma \frac{r}{m} d\delta = 0 \quad (C.2)$$

Remplazando la ec B.16 en la ec C.2 se obtiene

$$\gamma^2 \int \ddot{u} du + \gamma^2 \int \ddot{v}_g du + \gamma^2 \int \ddot{v}_0 du + \gamma^2 \int h \ddot{\theta} du + 2\xi^* \omega^* \gamma^2 \int \dot{u} du + \gamma^2 \int \frac{r}{m} du = 0 \quad (C.3)$$

El ultimo término de la ec C.3 representa la energía histerética ( $E_H^*$ ) mas la energía de deformación ( $E_S^*$ ) del sistema equivalente, es decir

$$E_H^* + E_S^* = \gamma^2 \int \frac{r}{m} du \quad (C.4)$$

Combinando las ecs C.1 y C.4 se obtiene

$$E_H^* + E_S^* = \gamma^2 (E_H + E_S) \quad (C.5)$$

De la definición de la energía histerética y de la ec C.5 se obtiene

$$E_H^* = \gamma^2 E_H \quad (C.6)$$

Si  $E_H^e$  es la energía histerética disipada en la estructura de varios niveles, y de acuerdo con la definición de  $E_H^*$ , ambos parámetros se pueden relacionar mediante

$$E_H^* = \frac{E_H^e}{M^*} \quad (C.7)$$

Combinando C.6 y C.7 y la aproximación dada por B.27 se obtiene

$$E_H^e = M_T E_H \quad (C.8)$$

La expresión anterior indica que es posible evaluar de manera aproximada la energía histerética disipada en una edificación de varios niveles sobre base flexible a partir de la evaluación de la energía histerética por unidad de masa en un sistema de 1GDL.