

## PRESION HIDRODINAMICA EN PRESAS RIGIDAS DURANTE SISMO.



H.P. HONG, F.J. SANCHEZ-SESMA, R. GOMEZ

### RESUMEN

Se estudia en este trabajo la presión hidrodinámica generada por un sismo en una presa rígida con parámetro compuesto por dos tramos rectos no verticales y fondo inclinado. Se obtiene la solución analítica exacta mediante el uso de la transformada de Schwarz-Christoffel. Se presentan algunos resultados al variar la geometría de la presa con los ángulos de inclinación de los parámetros y la inclinación del fondo.

### INTRODUCCION

El problema de evaluar la presión hidrodinámica en una presa rígida fue analizado inicialmente por Westergaard (11) en un estudio pionero en el que se considera que la cortina aguas arriba es vertical y en el fondo horizontal. Se obtiene la solución exacta para líquidos incompresibles expresada como la suma de una serie.

Después del trabajo de Westergaard, varios investigadores desarrollaron diferentes soluciones en las que se incluyen otros parámetros tales como la flexibilidad de la cortina (p.e. 6, 9), el fondo absorbente (p.e. 5) y la compresibilidad del fluido (p.e. 3, 10).

Una solución más completa, en lo que respecta a la geometría de la presa, fue la que desarrolló Chwang (4) quien, basado en la teoría de mapeo conforme, obtuvo la presión hidrodinámica de las presas que tienen un parámetro no vertical con la cortina; las hipótesis de fondo horizontal y líquido incompresible se mantuvieron en su estudio. Su solución ha sido extendida a presas con dos parámetros inclinados y el fondo horizontal (7) o a presas con un parámetro no vertical y el fondo inclinado (8).

Otra alternativa a la solución del problema la representan los métodos aproximados, con los cuales se establece una función variacional, y después, mediante un procedimiento numérico, se obtiene la solución (p.e. 1, 8).

El propósito del presente trabajo es presentar una solución exacta al problema de la presión hidrodinámica empleando la teoría de mapeo conforme (en especial la transformada de Schwarz-Christoffel). Se supondrá entonces que la cortina tiene dos parámetros inclinados y el fondo no horizontal; tanto la cortina como el fondo se consideran infinitamente rígidos.

#### FORMULACION TEORICA Y SOLUCION ANALITICA

Consideremos una presa con la cortina y la base rígidas como la que se muestra en la Fig. 1. El fluido almacenado es irrotacional, no viscoso e incompresible. Si se supone que el problema es bidimensional y que no se generan ondas de gravedad en la superficie libre del líquido la ecuación que gobierna el problema puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

donde  $p = p(x, y)$  es la presión hidrodinámica, y  $x, y$  son coordenadas cartesianas.

La hipótesis de que no se generan ondas de gravedad en la superficie libre del líquido conduce a la siguiente ecuación:

$$p(x, y) \Big|_{x=h} = 0 \quad (2)$$

donde  $h$  es la altura de la cortina.

Si en las fronteras de sólido y líquido existe una aceleración  $\vec{a}$ ,  $\vec{a} = (a_0 \cos \phi\pi, a_0 \sin \phi\pi)$  en la dirección  $\phi\pi$  con respecto al eje  $x$ , se puede escribir

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \vec{a} \cdot \vec{n} \quad (3)$$

donde  $\vec{n}$  es el vector normal a la superficie del sólido.

Aplicando la ecuación anterior a las superficies AC, CB y BD, se obtiene, respectivamente

(4)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_0 \operatorname{sen}(\theta_1 - \varphi)\pi$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_0 \operatorname{sen}(\theta_3 + \varphi)\pi$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho a_0 \operatorname{sen}(\theta_2 - \varphi)\pi$$

Con el objeto de obtener la solución analítica del problema, mediante la transformada de Schwarz-Christoffel, se puede transformar el plano Z (Fig. 1) en el plano  $\zeta$  que se muestra en la Fig. 2. Dicha transformada está dada por

(5)

$$Z = \alpha' \int_0^\zeta (\zeta + 1 + b)^{-\theta_1} (\zeta + b)^{\theta_1 + \theta_3 - 1} \zeta^{-\theta_2 - \theta_3} d\zeta + \beta$$

donde  $\theta_1\pi$ ,  $\theta_2\pi$  y  $\theta_3\pi$  son los ángulos que se muestran en la Fig. 1,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $b$  son constantes de la transformación, las cuales se determinan utilizando las propiedades geométricas de la presa, esto es, la función Z valuada en los puntos A, B y C (Fig. 1) debe ser, respectivamente

(6)

$$Z(A) = l_1 \exp(i\theta_1\pi) + l_2 \exp(i(1 - \theta_3)\pi)$$

$$Z(B) = 0$$

$$Z(C) = l_2 \exp(i(1 - \theta_3)\pi)$$

donde  $l_1$  y  $l_2$  son las distancias de A a C y de C a B, respectivamente. Sustituyendo esta ecuación en la ecuación 5 y empleando algunas operaciones algebraicas, se obtiene

(7)

$$l_1 = \alpha' \int_0^1 (b + \xi)^{-\theta_2 - \theta_3} \xi^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (1 - \xi)^{-\theta_1} d\xi$$

$$l_2 = \alpha' \int_0^1 (1/b + \xi)^{-\theta_1} \xi^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (1 - \xi)^{-\theta_2 - \theta_3} d\xi / b^{\theta_2} \quad (8)$$

donde  $\alpha' = \alpha \exp(-i \pi \theta_2)$ .

De las dos ecuaciones anteriores se pueden obtener los valores de  $b$  y  $\alpha'$ .

Por otra parte, la aplicación de la transformada de Schwarz-Christoffel a la geometría de la cortina cambia el dominio del problema a un semi-plano superior, por lo que es necesario construir una función analítica tal que

$$f = p + i q \quad (9)$$

donde  $q$  es la función conjugada compleja de la función  $p$  e  $i = \sqrt{-1}$

Empleando la ec. 4 y la condición de Cauchy-Riemman,  $\partial p / \partial n = \partial q / \partial s$  donde  $s$  es la distancia a lo largo de la frontera, se obtiene

$$q = -\rho a_0 S_1(\xi) \operatorname{sen}(\theta_1 - \varphi)\pi ; \quad -b-1 < \xi < -b \quad (10)$$

$$q = -\rho a_0 S_2(\xi) \operatorname{sen}(\theta_3 + \varphi)\pi ; \quad -b < \xi < 0$$

$$q = -\rho a_0 S_3(\xi) \operatorname{sen}(\theta_2 - \varphi)\pi ; \quad 0 < \xi < +\infty$$

donde

$$S_1(\xi) = S_0 + l_2 \operatorname{sen}(\theta_3 + \varphi)\pi / \operatorname{sen}(\theta_1 - \varphi)\pi$$

$$S_2(\xi) = \alpha' \int_{\xi}^0 (1 + b + t)^{-\theta_1} (t + b)^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (-t)^{-\theta_2 - \theta_3} dt$$

$$S_3(\xi) = \alpha' \int_0^{\xi} (1 + b + t)^{-\theta_1} (t + b)^{\theta_1 + \theta_3 - 1} t^{-\theta_2 - \theta_3} dt$$

$$S_0(\xi) = \alpha' \int_{\xi}^{-b} (1 + b + t)^{-\theta_1} (-b - t)^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (-t)^{-\theta_2 - \theta_3} dt$$

de las ecuaciones 2 y 10 se aprecia que a lo largo del eje real en el plano  $\zeta$ , las condiciones de frontera son mixtas (f está descrita por una parte real y otra imaginaria, ecuaciones 2 y 20). Si se introduce una función auxiliar  $g(\zeta)$  tal que

$$g(\zeta) = (\zeta + 1 + b)^{-1/2} f(\zeta) \quad (11)$$

se obtiene una condición no mixta para la función  $g(\xi)$

$$\text{Im } g(\xi) = \begin{cases} 0 & ; -\infty < \zeta < -b-1 \\ -\rho a_0 (\zeta + 1 + b)^{-1/2} S_1(\zeta) \text{ sen}(\theta_1 - \varphi)\pi & ; -b-1 < \zeta < -b \\ -\rho a_0 (\zeta + 1 + b)^{-1/2} S_2(\zeta) \text{ sen}(\theta_3 + \varphi)\pi & ; -b < \zeta < 0 \\ -\rho a_0 (\zeta + 1 + b)^{-1/2} S_3(\xi) \text{ sen}(\theta_2 - \varphi)\pi & ; 0 < \zeta < +\infty \end{cases} \quad (12)$$

donde  $\zeta$  toma los valores en el eje real del plano  $\zeta$ . Utilizando la fórmula integral de Cauchy-Hilbert (2), puede expresarse la función analítica  $g(\zeta)$  en el semi-plano  $\zeta$  superior como

$$g(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\text{Im } g(\xi)}{\xi - \zeta} d\xi$$

Sustituyendo las ecuaciones 12 y 13 en la ecuación 11, se obtiene

$$f(\zeta) = -\frac{\rho a_0}{\pi} (\zeta + 1 + b)^{1/2} \left( \int_{-b-1}^{-b} \frac{S_1(\xi) \text{ sen}(\theta_1 - \varphi)\pi}{(\xi+b+1)^{1/2}(\xi-\zeta)} d\xi + \int_{-b}^0 \frac{S_2(\xi) \text{ sen}(\theta_2 + \varphi)\pi}{(\xi+b+1)^{1/2}(\xi-\zeta)} d\xi + \int_0^{\infty} \frac{S_3(\xi) \text{ sen}(\theta_3 - \varphi)\pi}{(\xi+b+1)^{1/2}(\xi-\zeta)} d\xi \right) \quad (13)$$

Por lo tanto, la presión hidrodinámica sobre la cortina está dada por

$$p(\xi) = -\frac{\rho a_0}{\pi} (\xi + 1 + b)^{1/2} \left( \int_{-b-1}^{-b} \frac{S_1(t) \operatorname{sen}(\theta_1 - \varphi)\pi}{(t+b+1)^{1/2} (t-\xi)} dt \right. \\ \left. + \int_{-b}^0 \frac{S_2(t) \operatorname{sen}(\theta_2 + \varphi)\pi}{(t+b+1)^{1/2} (t-\xi)} dt + \int_0^\infty \frac{S_3(t) \operatorname{sen}(\theta_3 - \varphi)\pi}{(t+b+1)^{1/2} (t-\xi)} d\xi \right) \quad (14)$$

donde  $\int$  denota el valor principal de Cauchy. Para el cálculo numérico, la ecuación anterior se puede expresar en una forma diferente (4). Al diferenciar la ecuación 14 con respecto a  $\xi$ , se obtiene

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{\rho a_0 \alpha'}{\pi} \int_0^b (1+t)^{-\theta_1} t^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (b-t)^{-\theta_2 - \theta_3} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1} + u}{\sqrt{t+1} - u} \right| \operatorname{sen}(\theta_3 + \varphi)\pi dt \\ + \int_{-1}^0 (1+t)^{-\theta_1} (-t)^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (b-t)^{-\theta_2 - \theta_3} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1} + u}{\sqrt{t+1} - u} \right| \operatorname{sen}(\theta_1 - \varphi)\pi dt \\ - \int_b^\infty (1+t)^{-\theta_1} t^{\theta_1 + \theta_3 - 1} (t-b)^{-\theta_2 - \theta_3} \ln \left| \frac{\sqrt{t+1} + u}{\sqrt{t+1} - u} \right| \operatorname{sen}(\theta_2 - \varphi)\pi dt \quad (15)$$

donde  $u = \sqrt{1 + b + \xi}$ . Las integrales de la ecuación 15 se pueden obtener por integración de contorno, y después integrar con respecto a  $\xi$ . Así se llega a

$$P(\xi) = \begin{cases} \frac{\rho a_0}{\pi} (\pi(1_1 - S_0(\xi)) \cos(\theta_1 - \varphi)\pi + p_1(\xi)) ; \xi \in (-1 - b, -b) \\ \frac{\rho a_0}{\pi} (\pi 1_1 \cos(\theta_1 - \varphi)\pi - \pi(1_2 - S_2(\xi)) \cos(\theta_3 + \varphi)\pi + p_1(\xi)) ; \\ \xi \in (-b, 0) \end{cases} \quad (16)$$

donde

$$p_1(\xi) = 4\alpha' \cos\varphi\pi \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\xi + b + \sec^2\theta}{\xi + 1 + b} \right)^{\theta_1 - 1} \left( \frac{\xi + b + \sec^2\theta}{\xi + (1 + b) \sec^2\theta} \right)^{\theta_3} \\ \left( \frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\xi + (1 + b) \sec^2\theta} \right) \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta \cos\theta} d\theta$$

## RESULTADOS

En la sección anterior, se presentó la solución exacta del problema. Si se define el coeficiente de presión hidrodinámica  $c(\xi) = p(\xi)/\rho a_0$  y considerándose que  $\phi$  es igual a cero, esto es, la excitación es horizontal, de la ecuación 16 se obtiene que

(17)

$$c(\xi) = \begin{cases} (\pi(l_1 - S_0(\xi)) \cos\theta_1 \pi + p_1(\xi))/\pi ; & -b - 1 < \xi < -b \\ (\pi l_1 \cos\theta_1 \pi - (l_2 - S_2(\xi)) \cos\theta_3 \pi + p_1(\xi))/\pi ; & -b < \xi < 0 \end{cases}$$

donde

$$p_1(\xi) = 4\alpha' \int_0^{\pi/2} \left( \frac{\xi + b + \sec^2 \theta}{\xi + b + 1} \right)^{\theta_1 - 1} \left( \frac{\xi + b + \sec^2 \theta}{\xi + (1 + b) \sec^2 \theta} \right)^{\theta_3} \left( \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\xi + (1 + b) \sec^2 \theta} \right) \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} d\theta$$

Para una geometría dada, con las ecuaciones 7 y 8 pueden calcularse numéricamente las constantes de la transformación  $\alpha$  y  $b$ . Una vez obtenidas éstas, para valores dados de  $\xi$ , se evalúan los coeficientes de presión  $c(\xi)$  y la altura correspondiente  $y(\xi)$ . La expresión para  $y(\xi)$  puede obtenerse de la ecuación 6 y está dada por

(18)

$$y(\xi) = \begin{cases} l_1 \operatorname{sen} \theta_3 \pi + S_0(\xi) \operatorname{sen} \theta_1 \pi ; & -1 - b < \xi < -b \\ S_2(\xi) \operatorname{sen} \theta_3 \pi & ; -b < \xi < 0 \end{cases}$$

En el tratamiento anterior se ha supuesto una altura unitaria. Sin perder generalidad, el coeficiente de presión y la altura pueden expresarse mediante  $c = p/\rho a_0 h$  y  $y/h$ , respectivamente, donde  $h =$  altura. En las Figs. 3 a 8 se presentan resultados aplicables a varias geometrías en las que se ha supuesto un tramo vertical,  $v$ , en la parte superior del parámetro aguas arriba (A a C en la Fig. 1 con  $\theta_1 \pi = 90^\circ$ ). Se observa que al aumentar  $\theta_2$  disminuye la presión en la cortina y pueden presentarse presiones negativas en el fondo. Las distribuciones de presiones en la parte superior de la cortina son menos sensibles a las variaciones de la geometría a medida

que el tramo vertical disminuye. Si bien los coeficientes son menores cuando esto ocurre, la normalización con la altura del tramo vertical indica aumentos importantes. Esto muestra que la geometría del vaso regula de manera significativa la distribución de las presiones hidrodinámicas.

## CONCLUSION

La solución exacta que se ha presentado para evaluar la presión hidrodinámica generada por un sismo en una presa ha permitido verificar la importancia de la geometría de la cortina y del vaso en la distribución de presiones. Con respecto a vasos profundos pueden obtenerse incrementos sustanciales en los coeficientes de presión.

## AGRADECIMIENTO

Los autores agradecen a Emilio Rosenblueth la revisión crítica de este trabajo.

## REFERENCIAS

1. Avilés, J. y Sánchez-Sesma F., *Hydrodynamic pressures on dams with novertical upstream face*, J. of Engng Mech, ASCE, Vol. 112, No.10, Oct. 1986, pp 1054-61.
2. Carrier, G.F. Krook, M. y Pearson C.E., *Function of a complex variable*, McGraw-Hill, Nueva York, 1966.
3. Chopra, A.K. *Hydrodynamic pressure on dams during earthquakes*, J. Engng, Mech. Div., ASCE, Vol. 93, pp 205-223.
4. Chwang, A.T., *Hydrodynamic pressure on sloping dams during earthquakes*, Part. 2. Exact theory, J. Fluid Mech., Vol. 87, pp. 343-348.
5. Fenves, y Chopra A.K., *Effects of reservoir bottom absorption and dam-water-foundation rock interaction on frequency response function for concrete gravity dams.*, J. Earthq. Engng, & Struc.Dyn., Vol. 13
6. Finn, W.D.L. y Varoglu, *Dynamics of gravity dams-reservoir systems*, Computer and Struct. Vol. 3, 1973, pp 913-924.
7. Hong, H.P. y Sánchez-Sesma, F.J., "Presión hidrodinámica en presas con parámetros no verticales". Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe Interno, México, 1984.
- 8.- Liu, P. L-F., *Hydrodynamic pressures on rigid dams during earthquakes*, J. Fluid Mech. Vol. 165, 1986, pp 131-145.
9. Mei, C.C., Foda, M.A. y Tong, P., *Exact and hybrid element solution for the vibration of a thin elastic structure seated on the sea floor*, Applied Ocean Research, Vol. 1. 1979, pp 79-88.
10. Rashed, A.A., *Dynamic analysis of fluid-structure system*, Rep. no. EERI 82-03 Earthq. Engng. Res. Laboratory, C. I. T., Pasadena California, 1982.
11. Westergaard, H. M., *Water pressures on dams during earthquakes*, Transactions ASCE, Vol. 98, 1933, pp 418-472



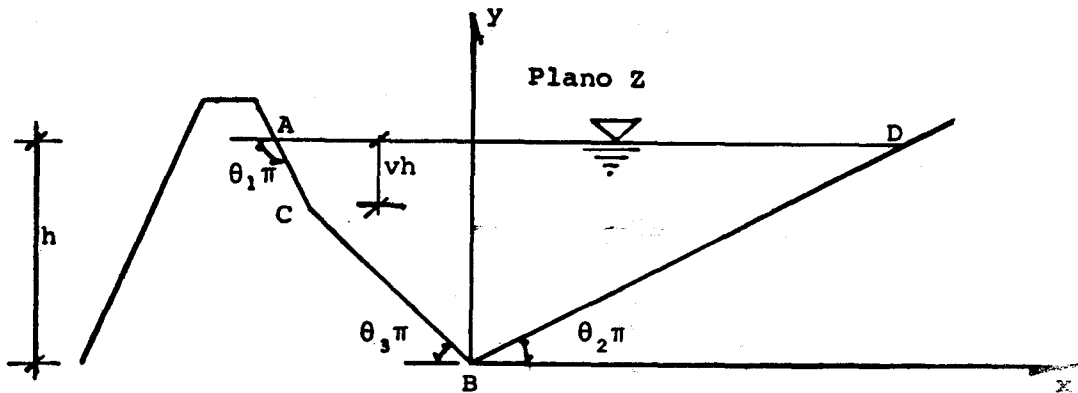


Fig 1. Presa rígida con paramentos inclinados

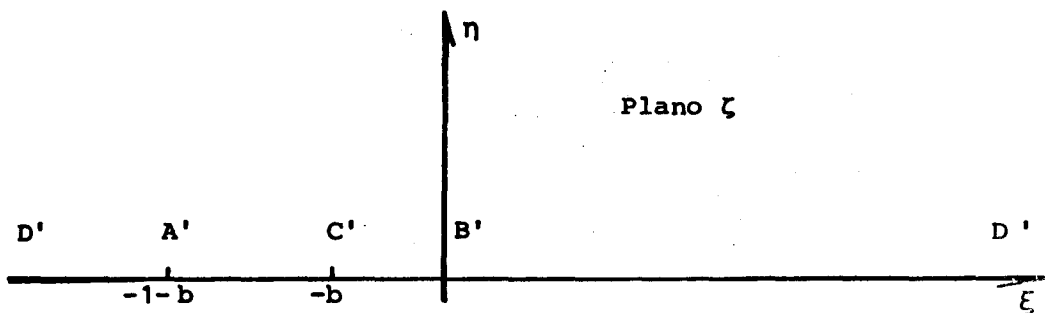


Fig 2. Frontera del dominio del problema transformado con la transformación de Schwarz-Christoffel

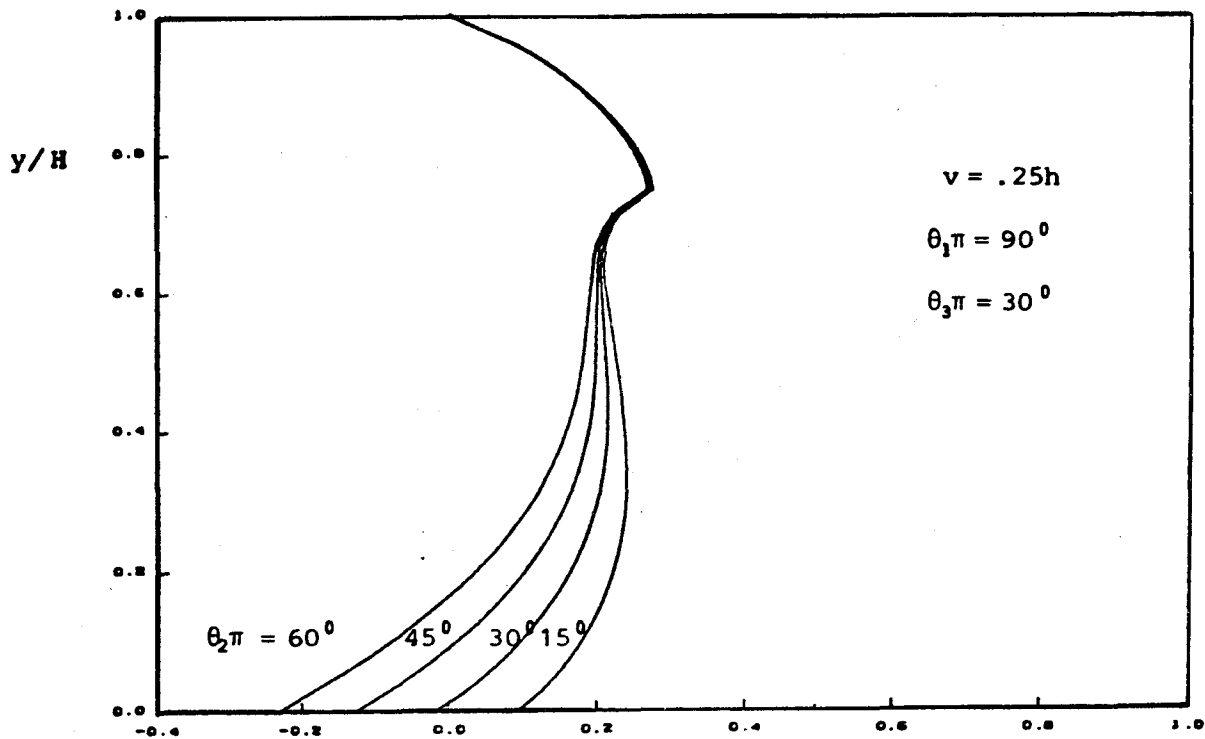


Fig 3. Coeficiente de presión hidrodinámica,  $c$

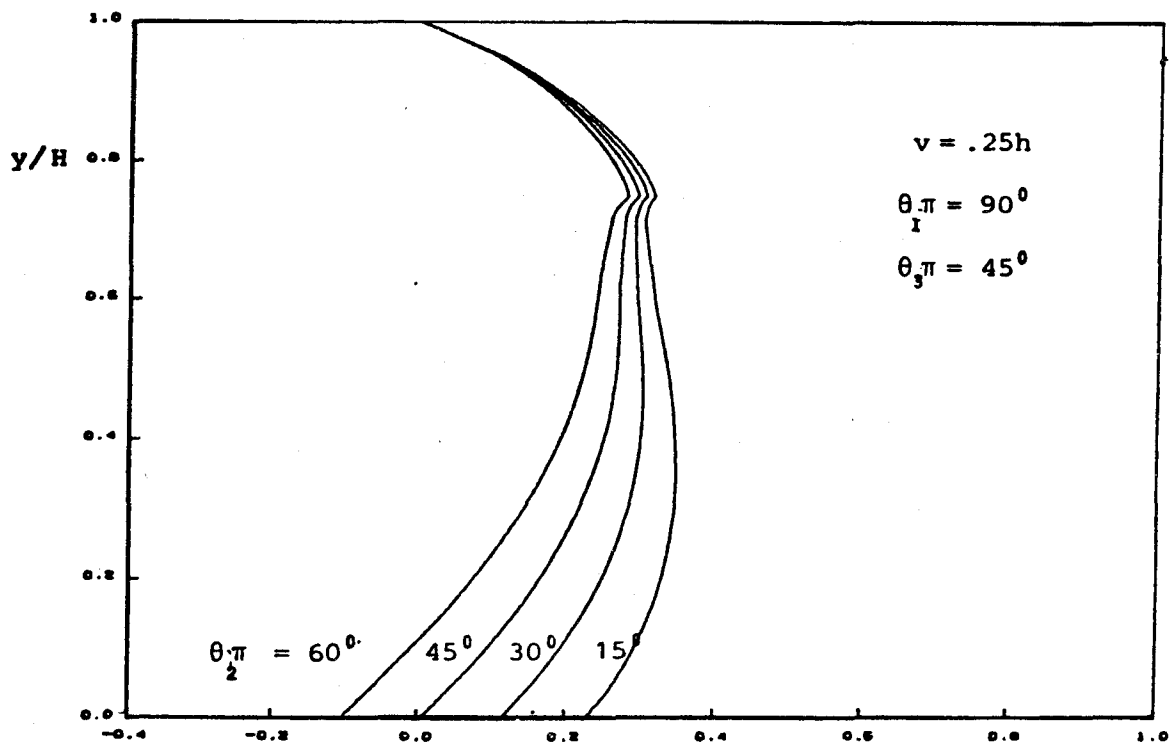


Fig 4. Coeficiente de presión hidrodinámica,  $c$

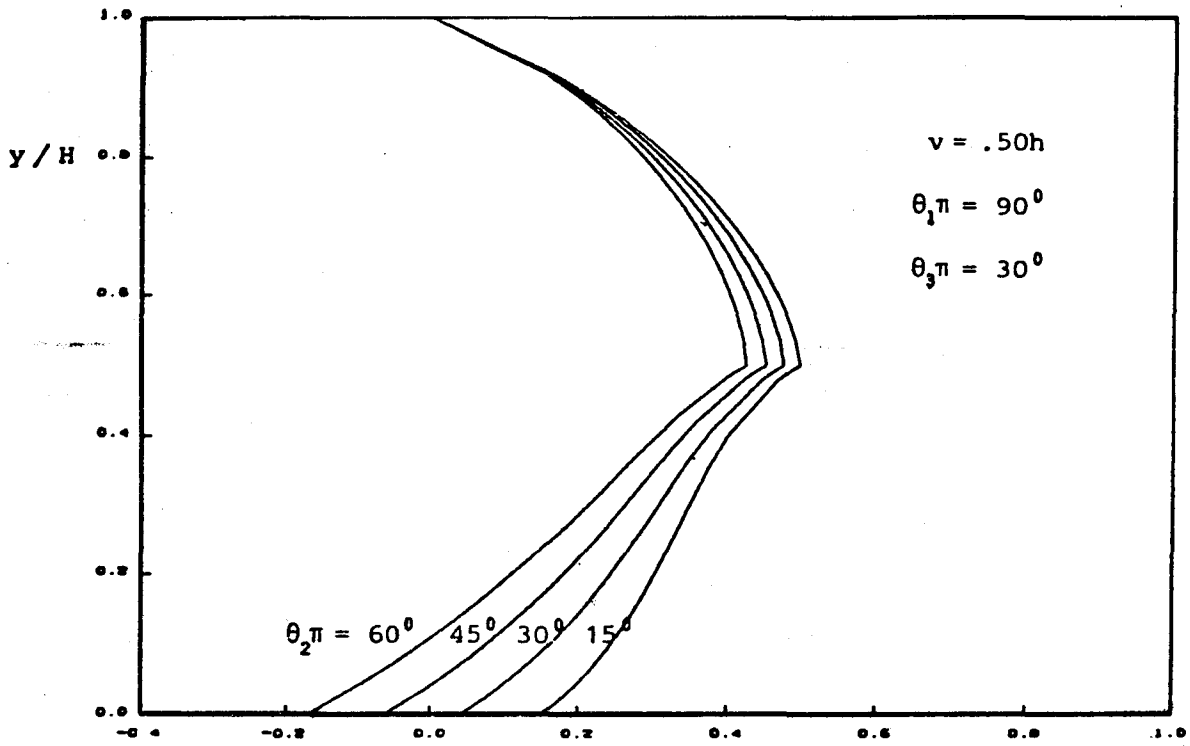


Fig 5. Coeficiente de presión hidrodinámica,  $c$

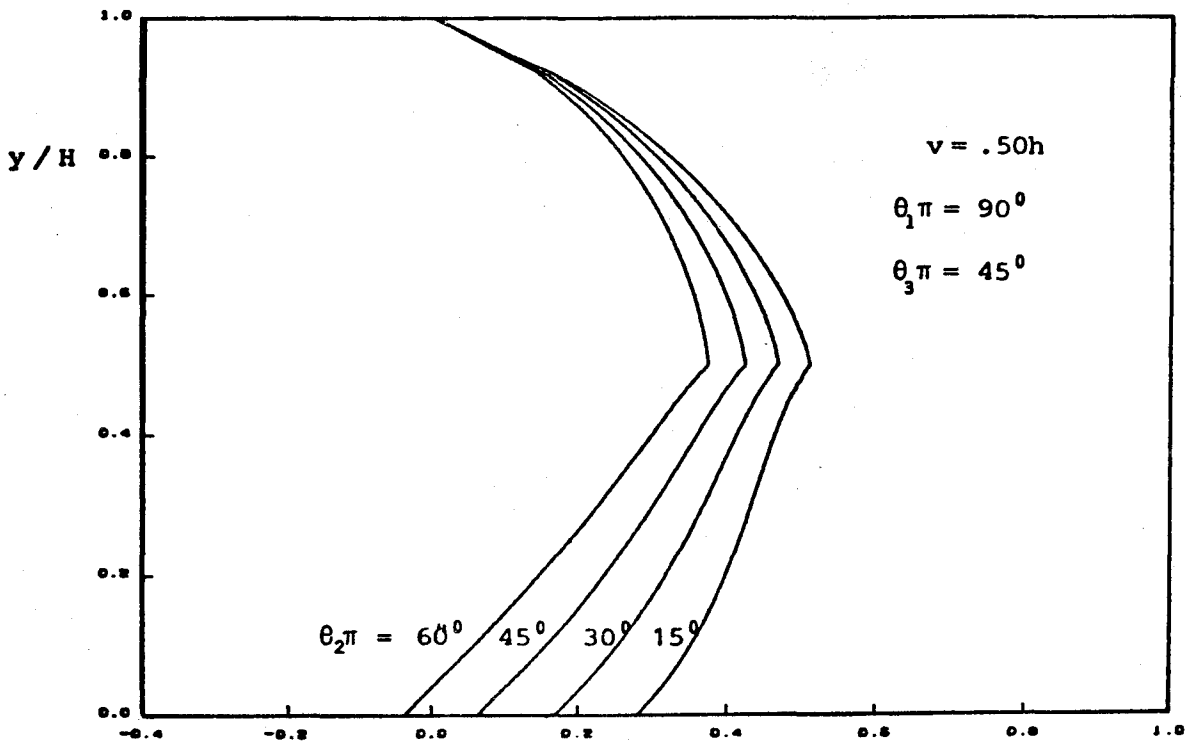


Fig 6. Coeficiente de presión hidrodinámica,  $c$

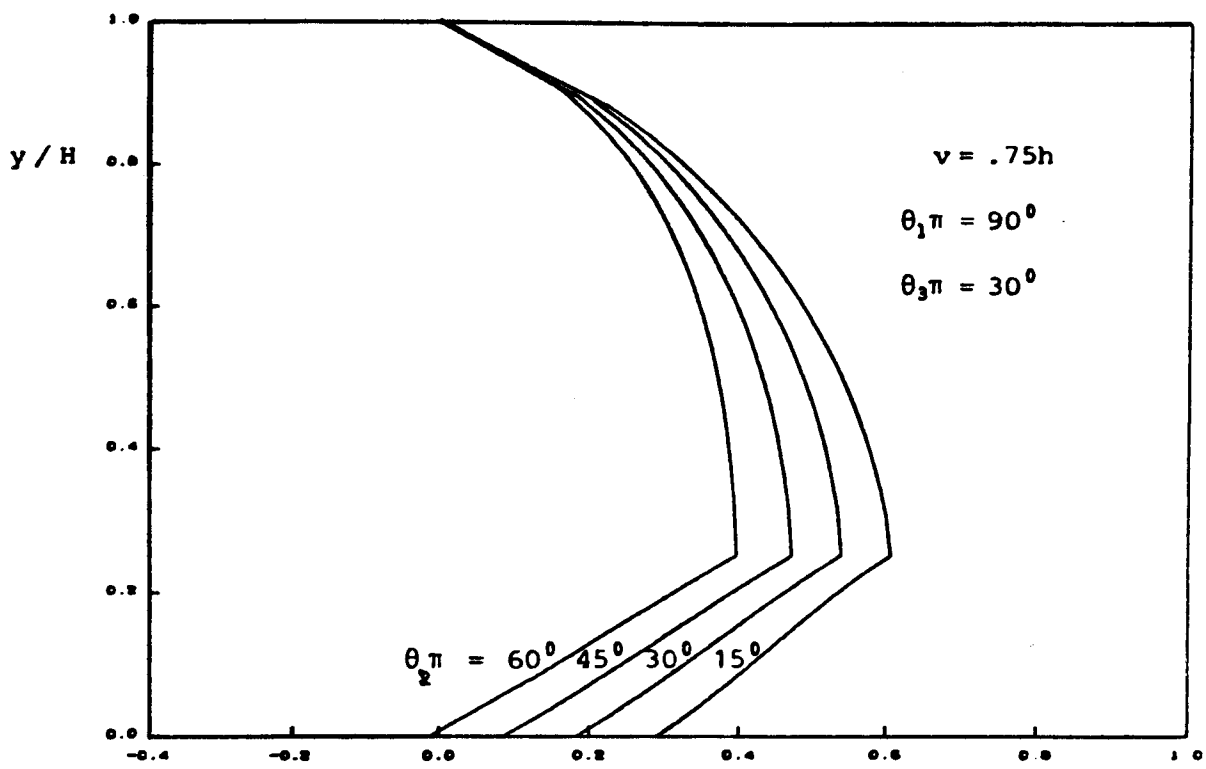


Fig 7. Coeficiente de presión hidrodinámica,  $c$

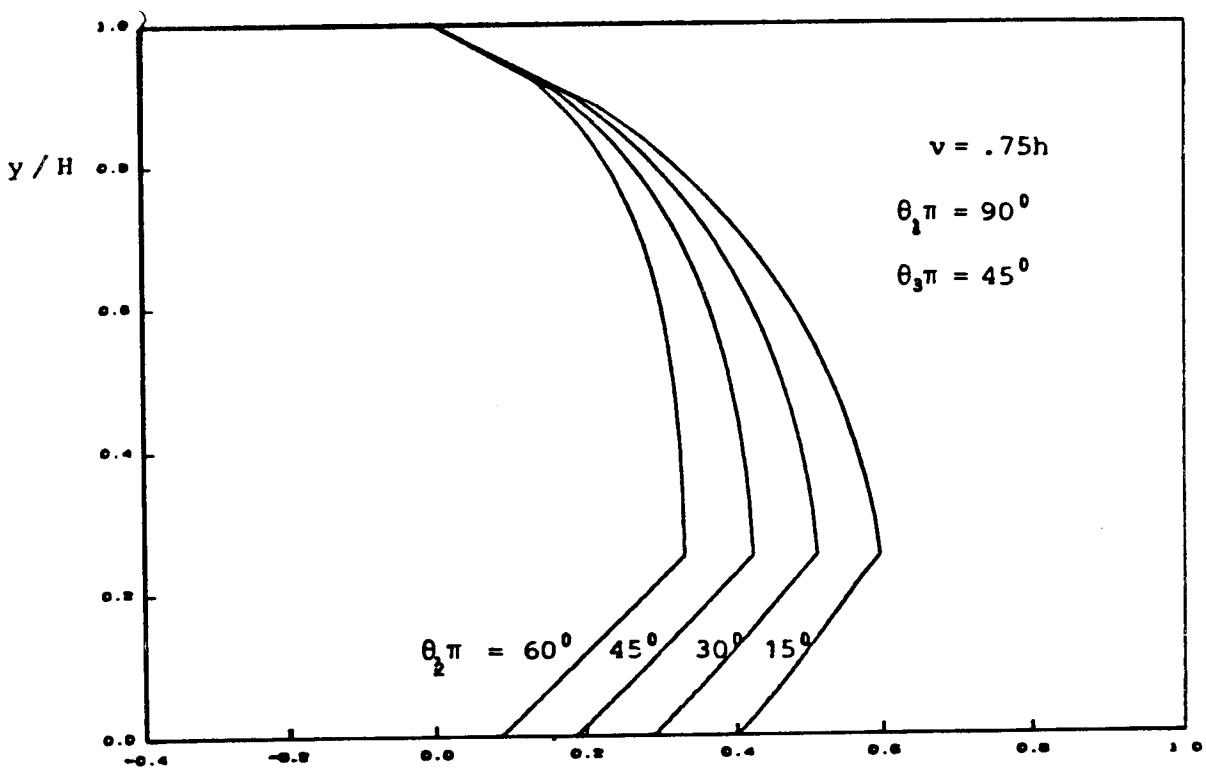


Fig 8. Coeficiente de presión hidrodinámica,  $c$