

Integración numérica en el dominio del tiempo

G. Ayala* y R. Gómez**

1. INTRODUCCION

Muchos problemas de interés práctico en ingeniería sísmica se describen como problemas de valores en la frontera y valores iniciales (ref 1). Dada la complejidad de estos problemas, su solución exacta es casi imposible, por lo que generalmente se emplean soluciones aproximadas provenientes de la aplicación de métodos numéricos. A continuación se trata solo la integración numérica en el dominio del tiempo.

Existe una variedad de métodos (ref 2) aplicables a la integración numérica de problemas en el dominio del tiempo (superposición modal, transformada de Fourier, métodos paso a paso, etc); de todos ellos, los paso a paso ofrecen la mayor flexibilidad en cuanto a los tipos de problemas que se pueden analizar. La característica esencial de estos métodos es que en cada paso de integración se emplean los resultados obtenidos de pasos anteriores. Diferentes tipos de problemas requieren en general diferentes algoritmos de integración. Su selección depende fundamentalmente de dos factores: aproximación y esfuerzo computacional requerido. Aquí se presenta una nueva familia de métodos paso a paso fundamentada en el método de Galerkin (ref 3); su generalidad y sencillez proporcionan al ingeniero una herramienta de aproximación poderosa y competitiva con los métodos tradicionales.

*Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM
**Estudiante Graduado, Instituto de Ingeniería, UNAM

2. METODO DE GALERKIN. (ref 3)

Toma su nombre del ingeniero ruso B. G. Galerkin quien lo utilizó intensivamente en la solución de problemas de elasticidad. Para aplicar el método a problemas de dinámica estructural, se requiere una solución aproximada de la ecuación de equilibrio dinámico, dada por

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + K U = P(t) \quad (1)$$

donde M = matriz de masas, C = matriz de amortiguamiento, K = matriz de rigideces, $P(t)$ = vector de cargas y U = vector de desplazamientos. Los puntos superiores representan derivación con respecto al tiempo.

Las condiciones iniciales correspondientes a la ec 1 son

$$\begin{aligned} U(0) &= U_0 \\ \dot{U}(0) &= \dot{U}_0 \end{aligned} \quad (2)$$

donde U_0 y \dot{U}_0 = vectores conocidos.

Sin perder generalidad, considérense las ecs 1 y 2 asociadas a un sistema de un grado de libertad, esto es

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t) \quad (1')$$

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ \dot{u}(0) &= \dot{u}_0 \end{aligned} \quad (2')$$

Para esta ecuación se propone una solución

aproximada de la forma dada por la expansión

$$u^* = \sum_{i=1}^N b_i \phi_i \quad (3)$$

donde b_i = coeficientes desconocidos y ϕ_i = funciones de interpolación que satisfacen condiciones de admisibilidad y completéz (ref 3).

La sustitución en la ec 1' de la solución aproximada dada por la ec 3 conduce a un error definido como

$$\epsilon = m \ddot{u}^* + c \dot{u}^* + k u^* - p(t) \quad (4)$$

El método de Galerkin permite, una vez seleccionada una forma de solución aproximada, encontrar los coeficientes b_i , tales que el error ϵ sea mínimo. Lo anterior se logra al ortogonalizar el error, dado por la ec 4, con respecto a tantas funciones de interpolación como coeficientes desconocidos existen en el problema, esto es

$$\int_0^h \epsilon \phi_j dt = 0 \quad j = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

donde h = longitud del intervalo de integración y M = número de coeficientes desconocidos.

La aproximación más simple aplicable a la ec 1 se puede escribir como

$$u^* = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 \quad (6)$$

Si se escogen como coordenadas generalizadas los valores u , \dot{u} y \ddot{u} definidos al principio del intervalo (conocidos) y el valor de la aceleración al final \ddot{u}_h (desconocido), de consideraciones puramente geométricas, la ec 6 se transforma en

$$u^* = u_0 + \dot{u}_0 t + \ddot{u}_0 \left[\frac{1}{2} (1 - \alpha) t^2 - \frac{1}{6} (1 - 2\alpha) \frac{t^3}{h} \right] + \ddot{u}_h \left[\frac{1}{2} \alpha t^2 + \frac{1}{6} (1 - 2\alpha) \frac{t^3}{h} \right] \quad (7)$$

donde α = parámetro que define la variación de la aceleración en el intervalo $0 < t < h$, fig 1. La selección de un valor adecuado de α dependerá del tipo de problema que se quiera resolver, ya que a cada valor estarán asociados un límite de estabilidad y una aproximación.

Ya que las condiciones al principio del intervalo son conocidas, solo es necesario ortogonalizar el residuo con respecto a una función de interpolación, por ejemplo, la asociada a la aceleración al final del intervalo. Además, si se considera que la carga, $p(t)$, varía linealmente en el intervalo $0 < t < h$, de la ec 5 se obtiene la relación

$$\begin{aligned} & \left[(-84\alpha^2 + 84\alpha + 84) m + 35(1 + \alpha) hc + \right. \\ & \left. (26\alpha^2 + 30\alpha + 10) h^2 k \right] \ddot{u}_h = - \left[(84\alpha^2 + \right. \\ & \left. 126\alpha + 21) m + (-35\alpha^2 + 77\alpha + 49) hc + \right. \\ & \left. (-26\alpha^2 + 26\alpha + 25) h^2 k \right] \ddot{u}_0 - \left[105 (1 + \right. \\ & \left. 2\alpha) c + (147\alpha + 84) hk \right] \dot{u}_0 - \\ & \left[105 (1 + 2\alpha) k \right] u_0 + \left[63\alpha + 21 \right] p_0 + \\ & \left[147\alpha + 84 \right] p_h \end{aligned} \quad (8)$$

Dada la flexibilidad del método de Galerkin para aplicarse a cualquier ecuación de tipo funcional, un esquema alternativo al de la ec 8 se obtiene al utilizar como ecuación original una representación integral de la ecuación de movimiento que contiene las condiciones iniciales dadas por las ecs 2 y 3.

La transformación de la ec 1 a una ecuación integral se fundamenta en la definición de la convolución de dos funciones $G(t)$ y $E(t)$ dada por

$$G^*E = \int_0^t G(\tau) E(t-\tau) d\tau = E^*G \quad (9)$$

Ya que $G^*E = 0$ implica que $G = 0$ o $E = 0$. La versión integral de la ec 1' se puede escribir

$$t^* |m \ddot{u} + c \dot{u} + k u - p(t)| = 0 \quad (10)$$

Se puede demostrar (ref 4) que la ec 10 finalmente se transforma en

$$m u + c u^*1 + k u^*t - \left[m (u_0 + t \dot{u}_0) + c t u_0 + p^*t \right] = 0 \quad (11)$$

que es una ecuación integral del tipo de Fredholm (ref 2).

Si se escoge como solución aproximada de la ec 11 la dada por la ec 7, la aplicación del método de Galerkin conduce al siguiente esquema.

$$\begin{aligned} & \left[(3744\alpha^2 + 4320\alpha + 1440) m + 315 (1 + 2\alpha)^2 ch + (296\alpha^2 + 280\alpha + 56) kh^2 \right] \ddot{u}_h = \\ & - \left[(-3744\alpha^2 + 3744\alpha + 3600) m + (-1260\alpha^2 + 900\alpha + 1125) ch + (-296\alpha^2 + 170\alpha + 259) \right. \\ & \left. kh^2 \right] \ddot{u}_0 - \left[(8064\alpha + 5040) c + (2160\alpha + 1440) kh \right] \dot{u}_0 - \left[(8064\alpha + 5040) k \right] u_0 + \\ & \left[4176\alpha - 3600 \right] p_0 - \left[2160\alpha + 1440 \right] p_h \quad (12) \end{aligned}$$

Es importante hacer notar que las ecs 8 y 12 dan, en cada caso, un valor de aceleración al final del intervalo de utilidad en el cálculo del desplazamiento y de la velocidad correspondientes. Sin embargo, esta aceleración no satisface el equilibrio, por lo que es necesario calcular el valor real de la aceleración de la ec 1' evaluada en el tiempo $t = h$.

Las ecuaciones necesarias para el cálculo del desplazamiento y la velocidad al final del intervalo, se obtienen de la ec 7, y son

$$u_h = u_0 + \dot{u}_0 h + \frac{(2-\alpha)}{6} \ddot{u}_0 h^2 + \frac{(1+\alpha)}{6} \ddot{u}_h h^2 \quad (13)$$

$$\dot{u}_h = \dot{u}_0 + \frac{1}{2} \ddot{u}_0 h + \frac{1}{2} \ddot{u}_h h \quad (14)$$

Nótese que las ecs 13 y 14 son equivalentes a las originalmente propuestas por Newmark (ref 5) para un valor $\gamma = \frac{1}{2}$ y con \ddot{u}_h directamente obtenido de la ec 1.

Dada la importancia que tiene para la analista el conocer el límite de estabilidad de un método de integración se estudió la estabilidad de los esquemas propuestos. Las figs 2 y 3 muestran la variación del radio espectral de la matriz de amplificación con la relación del intervalo de integración al periodo natural del sistema; valores del radio espectral mayores que uno indican inestabilidad del método.

3. EJEMPLOS NUMERICOS

Para evaluar la aproximación y estabilidad de los esquemas presentados en esta nota, se analizó la ecuación de movimiento de un sistema de un grado de libertad expresada como

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega u + \omega^2 u = 0 \quad (15)$$

donde ω = frecuencia natural y ζ = fracción de amortiguamiento crítico.

Las condiciones iniciales escogidas fueron

$$u_0 = 0 \quad (16)$$

$$\dot{u} = \omega \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (17)$$

La solución exacta de la ec 15 con condiciones iniciales dadas por las ecs 16 y 17 se escribe como

$$u = e^{-\zeta\omega t} \operatorname{sen} \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (18)$$

Debido a las características de amortiguamiento de la ec 18, el error hereditario (efecto del error acumulado en el paso anterior) resultante de la aplicación de los dos esquemas aquí presentados, tiende a incrementarse con el tiempo. Por ello el ejemplo escogido es un buen indicador de las características de aproximación de los esquemas de integración.

Las figs 4 y 5 ilustran la aproximación que se obtiene con los esquemas de las ecs 8 y 12, para el valor de $\alpha = 0$, un paso de integración $h = \frac{T}{10}$, donde T es el periodo fundamental del sistema.

También, con fines de comparación se presentan los resultados correspondientes al método Beta de Newmark con $\beta = \frac{1}{6}$ en la fig 6.

4. CONCLUSIONES

Se presentó una nueva familia de esquemas de integración paso a paso aplicables a la ecuación de equilibrio dinámico. En la derivación de los esquemas se exploraron dos alternativas de aplicación del Método de Galerkin a la ecuación de equilibrio dinámico.

De la comparación de este método con el método Beta de Newmark se encontró que para una variación lineal de la aceleración, el esquema de Galerkin proporciona con un límite de estabilidad

parecido, una mejor aproximación; esto no sucede con el esquema de la ec 12, ya que en este caso para el intervalo de integración considerado se tienen problemas de estabilidad.

En los casos estudiados, no fue posible definir un valor de α para estabilidad incondicional. Sin embargo, resultados preliminares indican que si se ortogonaliza el error con respecto a la función de interpolación asociada a la velocidad al inicio del intervalo, la estabilidad del método mejora. Por lo que, para definir esquemas con límites de estabilidad menos estrictos resta investigar cuáles es el efecto de emplear en la ec 5 funciones de peso aun no consideradas.

5. RECONOCIMIENTO

Se agradece a L. Esteva la revisión crítica del manuscrito.

6. REFERENCIAS

1. Newmark, N M y Rosenblueth, E, "Fundamentos de ingeniería sísmica", Ed. Diana, México (1976)
2. Ayala Milián, G y Brebbia, C A, "A survey of numerical integration in time domain", Informe CE/4/73, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Southampton (1973)
3. Galerkin, B C, "Rods and plates. Series in some problems of elastic equilibrium of rods and plates", Vestn, Inzh, Tech. (URSS), 19, pp 897-908, traducción 63 - 18 924, Clearinghouse, Federal Scientific Technical Information, EUA (1975)

4. Churchill, R V, "Operational mathematics", Mc Graw Hill-Kogakusha, Tokio (1958)

5. Newmark, N M "A method of computation for structural dynamics", Journal of the Engineering Mechanics Division, SCE, Vol 85 No EM3, pp 67-94 (1959)

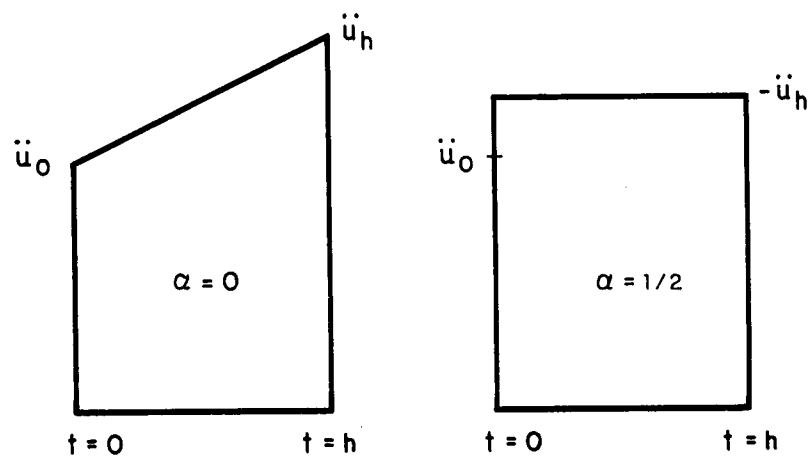


Fig 1. Variación de la aceleración para $\alpha = 0, 1/2$

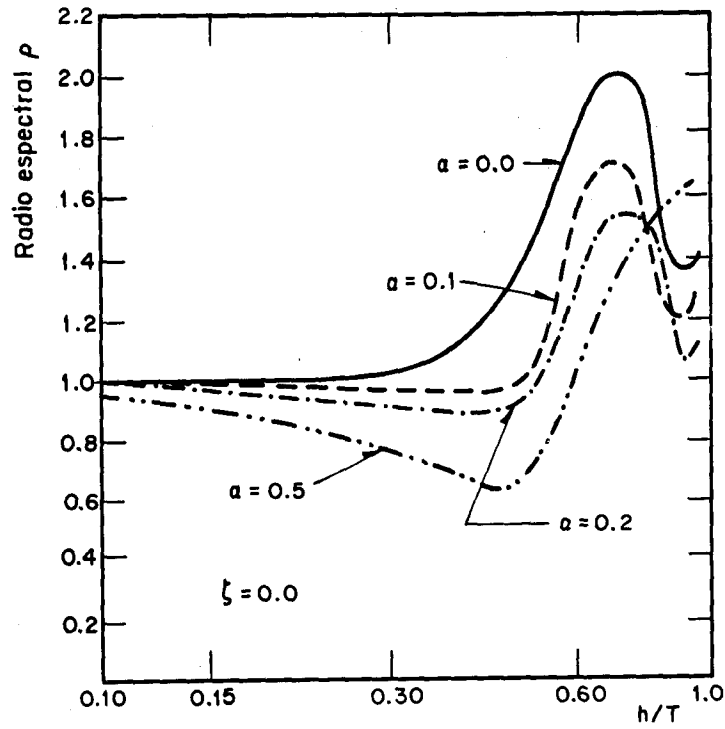


Fig 2. Variación del radio espectral, método de Galerkin convencional

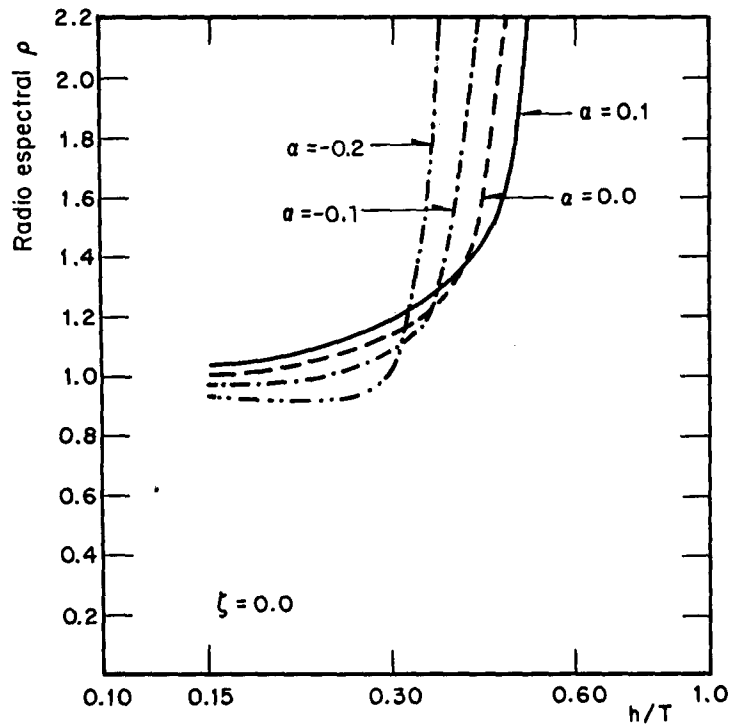


Fig 3. Variación del radio espectral, método de Galerkin con convolución

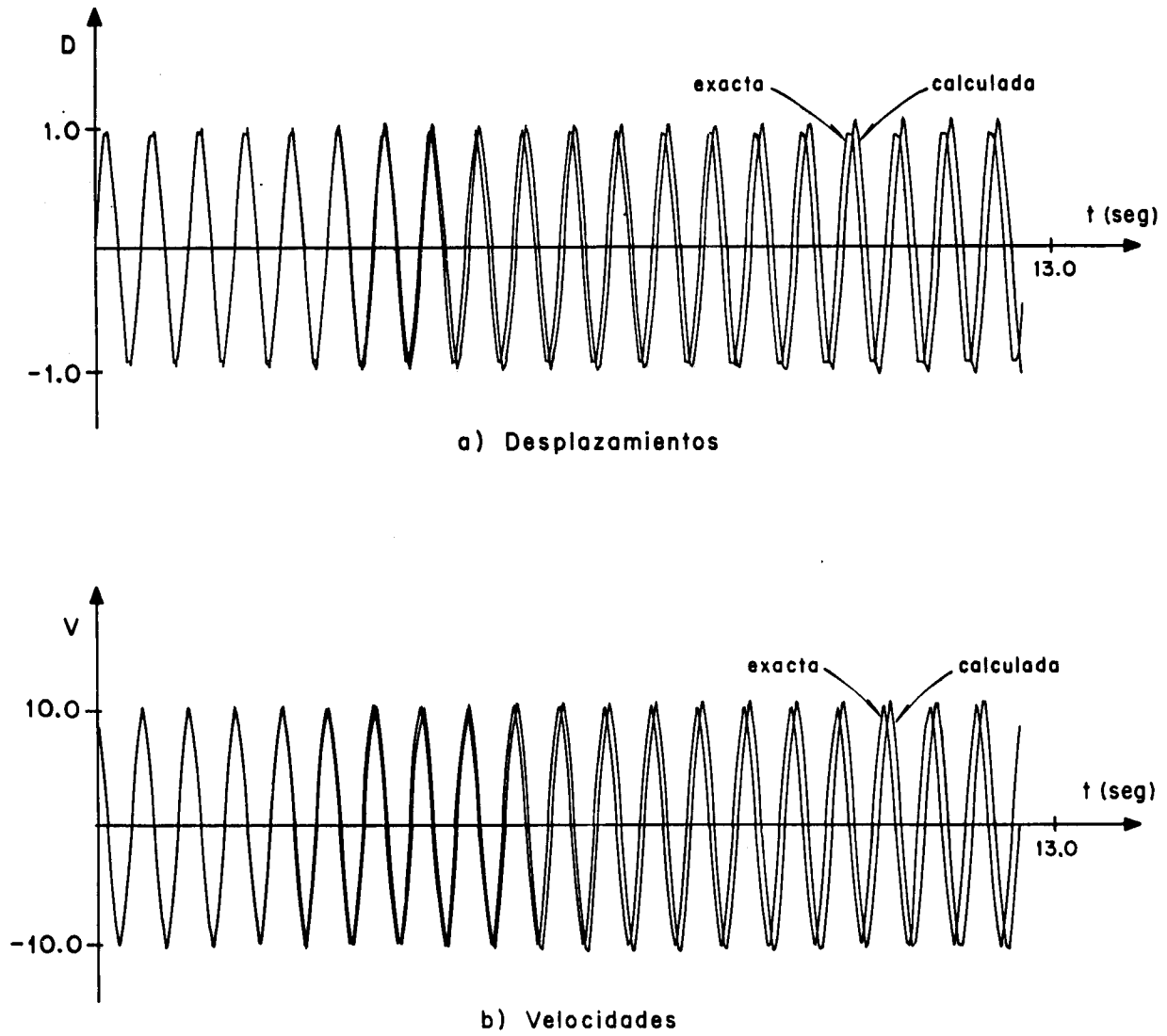


Fig 4. Resultados obtenidos con el método de Galerkin convencional, $h = T/10$

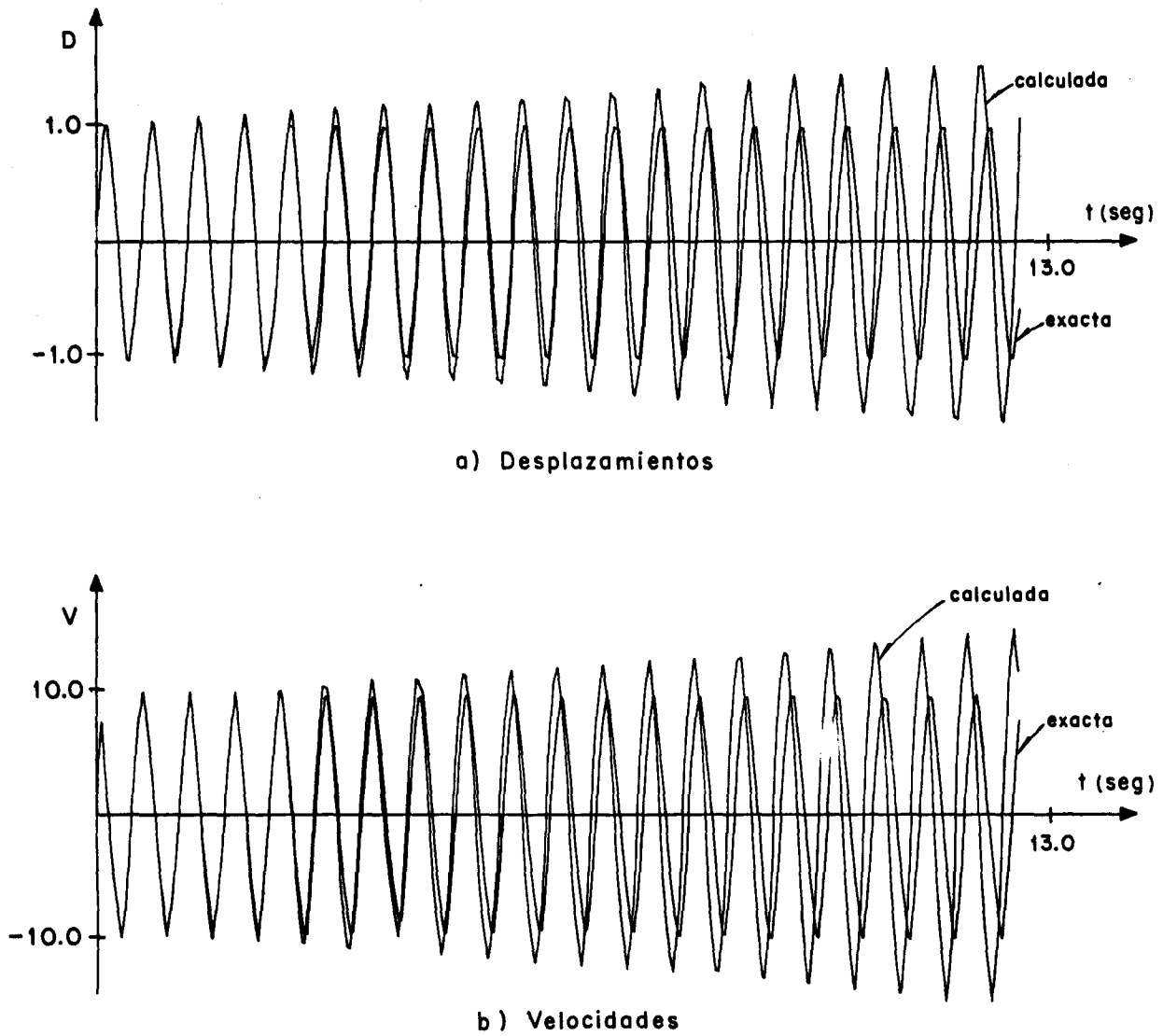


Fig 5. Resultados obtenidos con el método de Galerkin con convolución, $h = T/10$

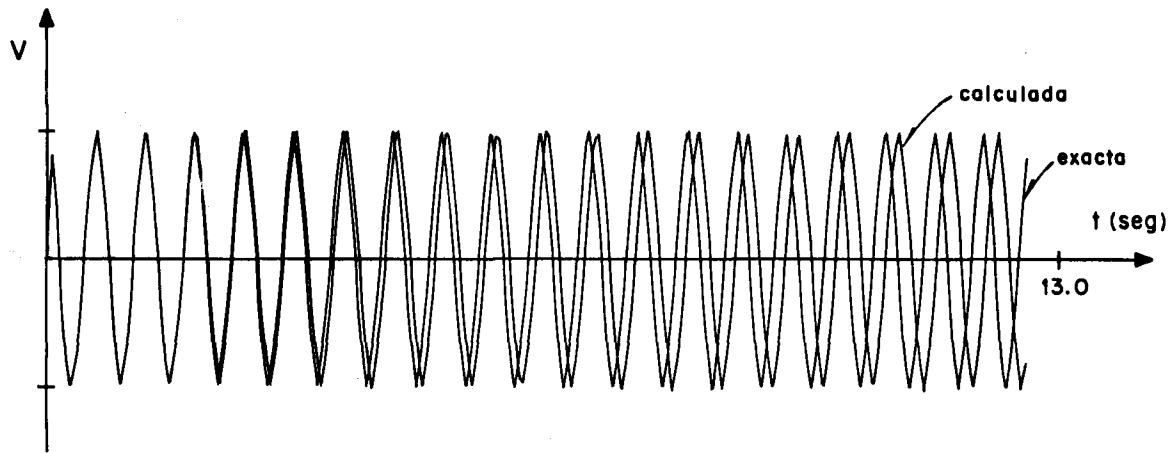
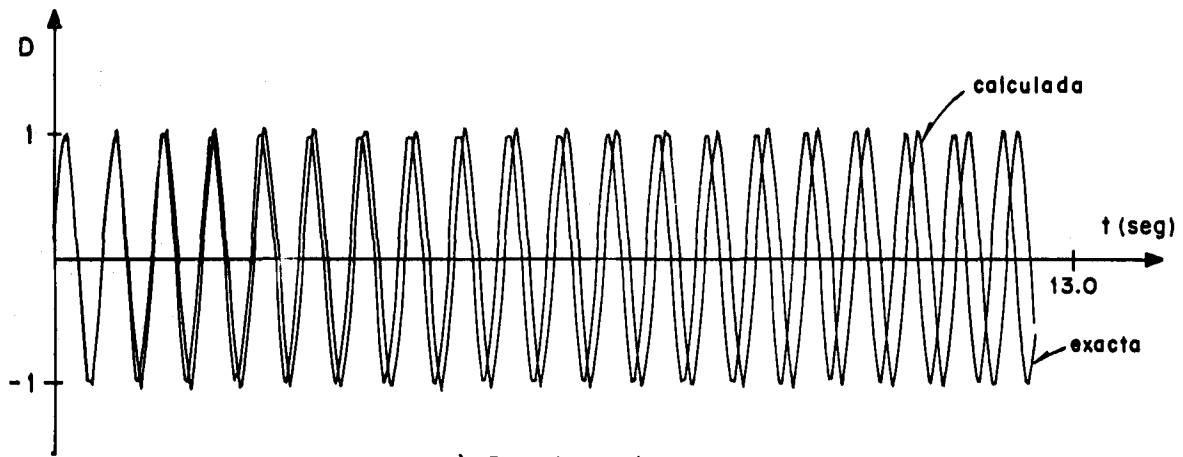


Fig 6. Resultados obtenidos con la aplicación del método β de Newmark, $h = T/10$, $\beta = 1/6$