

MOVIMIENTO DEL TERRENO EN DEPRESIONES
BIDIMENSIONALES DE FORMA ARBITRARIA
ANTE INCIDENCIA DE ONDAS SH PLANAS

Francisco J. Sánchez-Sesma*
Emilio Rosenblueth*

ABSTRACT

A method is presented for the solution of the problem of diffraction of plane SH waves by canyons of arbitrary shape on the surface of an elastic half-space. The method is based on the principle of superposition. Both the analytical and numerical formulation of the problem are presented as well as results which illustrate the goodness of the proposed method. Amplitude and phase spectra are shown for the case of triangular canyon.

RESUMEN

Se presenta un método para resolver el problema de difracción de ondas SH planas por cañones de forma arbitraria en la superficie de un semiespacio elástico. El método se basa en el principio de superposición. Se presentan la formulación analítica del problema, la formulación detallada para el cálculo numérico y resultados que permiten ilustrar la bondad del método. Se exhiben espectros de amplitudes y fases para un cañón triangular.

1. INTRODUCCION

Se ha reconocido la influencia de las condiciones locales en las características de los sismos como un factor de interés en diseño sísmico (1, 2). Es sabido que en sitios relativamente cercanos entre sí, pero de topografía disímil, los movimientos sísmicos pueden presentar diferencias notables, aunque ciertos parámetros como la

distancia a la falla activa y los ángulos de incidencia predominantes sean sensiblemente los mismos.

El asunto ha sido tratado en la literatura como problema de difracción de ondas elásticas. Existen soluciones analíticas para el caso de un cañón semicircular o semielíptico con incidencia de ondas planas de constante polarizadas horizontalmente, o SH (3, 4). Para un problema similar se ha empleado la aproximación acústica, en la que, debido a la naturaleza de la aproximación, solo se consideran en detalle ondas de compresión, o P, de incidencia vertical (5). Para geometrías irregulares el problema ha sido formulado en términos de ecuaciones integrales (6). Un método que hace uso de ecuaciones integrales, discretizadas al suponer periodicidad en la forma de la superficie, ha sido empleado para estudiar los efectos de la topografía en el movimiento ante incidencia de ondas P, SV y SH (11).

Se ha encontrado que los efectos topográficos son significativos cuando la longitud de las ondas incidentes es comparable con el tamaño de la irregularidad (7, 11).

En este escrito se presenta un método para resolver el problema de difracción de ondas SH planas por cañones de forma arbitraria. El método se basa en el principio de superposición. A la solución de campo libre, es decir, si no existiese irregularidad, se adicionan soluciones elementales que cumplen condiciones de frontera libre con singularidades o fuentes fuera del dominio de interés; la amplitud de estas soluciones es tal que se cumplen condiciones de frontera libre en los bordes del cañón. Para ondas SH planas este proceder es directo, ya que es sencillo determinar la solución elemental. Para otros tipos de ondas sísmicas será necesario construir las soluciones elementales antes de aplicar el método descrito.

Se presentan aquí la formulación analítica del problema, la formulación para el cálculo numérico y los resultados numéricos. La bondad del método se ilustra comparando espectros de amplificación con los obtenidos analíticamente para el cañón semicircular. Se presentan resultados para cañones semielípticos y triangulares.

* Instituto de Ingeniería, UNAM, México 20 D F

2. FORMULACION DEL PROBLEMA

En el problema de propagación de ondas SH planas en un medio elástico los desplazamientos deben satisfacer la ecuación de onda (8)

$$\nabla^2 u_z = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde ∇^2 = operador laplaciano, $c_s = \sqrt{G/\rho}$ = velocidad de propagación de ondas de cortante, G = módulo de elasticidad en cortante, t = tiempo, u_z = desplazamientos en la dirección z y ρ = densidad del medio.

Acéptese una dependencia armónica del tiempo, es decir

$$u_z(x, y, t) = u_z(x, y, \omega) e^{i\omega t} \quad (2)$$

donde ω = frecuencia circular. Sustituyendo la ec 2 en la ec 1 se obtiene la ecuación de Helmholtz o reducida de onda

$$\nabla^2 u_z + k^2 u_z = 0 \quad (3)$$

donde $k = \omega/c_s$.

Considérese una onda incidente de amplitud unitaria que asciende hacia la superficie de un semiespacio elástico

$$u_z^{(i)} = \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y} \right) \quad (4)$$

donde $c_x = c_s/\sin \gamma$, $c_y = c_s/\cos \gamma$, γ = ángulo de incidencia (fig 1).

Para que se tengan condiciones de frontera libre en la superficie del semiespacio, es decir esfuerzo cortante nulo, se deberá tener una onda reflejada dada por

$$u_z^{(r)} = \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x} - \frac{y}{c_y} \right) \quad (5)$$

Así, se tiene la solución de campo libre $u_z^{(0)} = u_z^{(i)} + u_z^{(r)}$ que puede escribirse como

$$u_z^{(0)} = 2 \cos \left(\frac{\omega y}{c_y} \right) \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x} \right) \quad (6)$$

Esta expresión satisface las ecs 1 y 3, así como la condición en la superficie

$$(\tau_{yz})_{y=0} = \left(G \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (7)$$

Considérese ahora el problema de determinar u_z cuando existe una depresión bidimensional (fig 2).

Sea u_z dado por

$$u_z = u_z^{(0)} + u_z^{(d)} \quad (8)$$

donde el superíndice d se refiere a las ondas difractadas. La ec 8 debe satisfacer las ecs 1 y 3 en el dominio de interés y la condición de esfuerzo nulo en la frontera S ; es decir

$$(\tau_{nz})_S = \left(G \frac{\partial u_z}{\partial n} \right)_S = 0 \quad (9)$$

donde n = vector unitario normal a la frontera S (fig 2).

Los desplazamientos $u_z^{(d)}$ pueden escribirse como una combinación lineal de soluciones elementales de la ec 3 que cumplan con la condición de radiación (9), con sus respectivas singularidades fuera de la región de interés.

Considérese la ecuación

$$\nabla^2 u_z + k^2 u_z = -\delta(|\vec{r} - \vec{r}_0|) \quad (10)$$

donde δ = delta de Dirac, \vec{r} = vector de posición de un punto P de coordenadas (x, y) , \vec{r}_0 = vector de posición de un punto P_0 de coordenadas (x_0, y_0) y, $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ = distancia entre los puntos P y P_0 .

Una solución de esta ecuación que cumple con la condición de radiación adecuada es (6,8)

$$u_z = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|\vec{r} - \vec{r}_0|) e^{i\omega t} \quad (11)$$

donde $i = \sqrt{-1}$, $H_0^{(2)}(\cdot)$ = función de Hankel de segunda especie y orden cero. La ec 11 se conoce también como la función de Green para el espacio completo y representa ondas SH cilíndricas que se propagan en dirección radial a partir de P_0 . Esto puede verse si se recurre a la expansión asintótica de $H_0^{(2)}$ para valores grandes del argu

mento. Sea $r_1 = |\bar{r} - \bar{r}_0|$, entonces para $|\bar{r}| \gg |\bar{r}_0|$ la ec 11 puede escribirse como (8)

$$u_z \sim \frac{\sqrt{2} i}{4\sqrt{\pi k r_1}} e^{i\pi/4} e^{-i(kr_1 - \omega t)} \quad (12)$$

El examen de la ec 12 indica que se trata de ondas que se propagan radialmente con una velocidad c_s .

La solución elemental para el semiespacio con frontera libre puede construirse fácilmente recurriendo al uso de imágenes y escribir

$$u_z^* = \frac{i}{4} \{H_0^{(2)}(kr_1) + H_0^{(2)}(kr_2)\} e^{i\omega t} \quad (13)$$

donde u_z^* = solución elemental para el semiespacio, $r_1 = |\bar{r} - \bar{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}$. Es claro que r_2 es la distancia de un punto en el semiespacio al punto de coordenadas x_0 , $-y_0$ que es la imagen del punto P_0 . Entonces la ec 13 representa la solución para una fuente en el punto P_0 pues satisface la condición de frontera libre en $y = 0$.

Sean las regiones R y E limitadas por el semiespacio y la frontera común S (fig 3). Colocando fuentes en N puntos de la región R se tendrá que la ec 8 se puede escribir como

$$u_z = u_z^{(0)} + \sum_{q=1}^N b_q u_{zq}^* \quad (14)$$

donde b_q son constantes complejas que se determinarán de manera que en S se cumpla que

$$\frac{\partial u_z}{\partial n} = 0 \quad (15)$$

ya que se satisface la condición de frontera libre en $y = 0$.

De las ecs 14 y 15 se tiene

$$\sum_{q=1}^N b_q \frac{\partial u_{zq}^*}{\partial n} = - \frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial n} \quad (16)$$

Si se aplica la condición de la ec 16 en M puntos de la frontera, se tendrá

$$\sum_{q=1}^N b_q \left(\frac{\partial u_{zq}^*}{\partial n} \right)_j = - \left(\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial n} \right)_j ; j=1,2,\dots,M \quad (17)$$

La ec 17 representa un sistema de ecuaciones lineales con N incógnitas, b_q , $q = 1, \dots, N$. Si $M = N$ el sistema estará completamente determinado. Cuando $M > N$ se tendrá un sistema sobredeterminado pues tendrá más ecuaciones que incógnitas. No obstante, usando el método de *colocación y mínimos cuadrados* puede obtenerse una solución que minimice el error cuadrático. En el Apéndice B se describe brevemente dicho método.

La posición de las fuentes y los puntos de la frontera dependerá de la geometría particular de cada problema.

3. FORMULACION PARA EL CALCULO NUMERICO

El miembro derecho de la ec 17 puede escribirse como

$$\left(\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial n} \right)_j = \left(\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial x} \right)_j \cos \theta_j - \left(\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial y} \right)_j \sin \theta_j \quad (18)$$

donde, de la ec 6 al omitir el factor $\exp i\omega t$,

$$\left(\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial x} \right)_j = -i \frac{2\omega}{c_x} \cos \left(\frac{\omega y_j}{c_y} \right) \exp \left(-i \frac{\omega x_j}{c_x} \right) \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial u_z^{(0)}}{\partial y} \right)_j = - \frac{2\omega}{c_y} \sin \left(\frac{\omega y_j}{c_y} \right) \exp \left(-i \frac{\omega x_j}{c_x} \right) \quad (20)$$

θ_j = ángulo que forma la normal en el punto j con el eje x (fig 2); x_j , y_j = coordenadas del punto j.

De manera similar, los coeficientes del sistema en la ec 17 quedan

$$\left(\frac{\partial u_{zq}^*}{\partial n} \right)_j = \left(\frac{\partial u_{zq}^*}{\partial x} \right)_j \cos \theta_j - \left(\frac{\partial u_{zq}^*}{\partial y} \right)_j \sin \theta_j \quad (21)$$

donde

$$\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial x}\right)_j = \frac{ik}{4} \left\{ H_0^{(2)'}(kr_1) \frac{\partial r_1}{\partial x_j} + H_0^{(2)'}(kr_2) \frac{\partial r_2}{\partial x_j} \right\} \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial y}\right)_j = \frac{ik}{4} \left\{ H_0^{(2)'}(kr_1) \frac{\partial r_1}{\partial y_j} + H_0^{(2)'}(kr_2) \frac{\partial r_2}{\partial y_j} \right\} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x_q - x_j)^2 + (y_q - y_j)^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x_q - x_j)^2 + (y_q + y_j)^2} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_j} = \frac{x_j - x_q}{r_1}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial x_j} = \frac{x_j - x_q}{r_2}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial y_j} = \frac{y_j - y_q}{r_1}, \quad \frac{\partial r_2}{\partial y_j} = \frac{y_j + y_q}{r_2}$$

$H_0^{(2)'}(\cdot)$ = derivada de la función de Hankel de orden cero. Se tiene que

$$H_0^{(2)'}(\cdot) = -H_1^{(2)}(\cdot) \quad (25)$$

$$H_1^{(2)}(\cdot) = J_1(\cdot) - iY_1(\cdot) \quad (26)$$

donde $J_1(\cdot)$ = función de Bessel de primera clase y orden uno, $Y_1(\cdot)$ = función de Bessel de segunda clase y orden uno.

En forma matricial el sistema de ecuaciones de la ec 17 queda

$$[a_{jq}] \{b_q\} = \{f_j\} \quad (27)$$

Los elementos a_{jq} y f_j están dados por las ecs 21 y 18, respectivamente.

Cuando $M > N$ la solución para el vector $\{b_q\}$ que minimiza el error cuadrático se obtiene al resolver el sistema que resulta de premultiplicar la ec 27 por la matriz traspuesta conjugada de la matriz de coeficientes (Apéndice B). Esto es

$$[\bar{a}_{jq}]^T [a_{jq}] \{b_q\} = [\bar{a}_{jq}]^T \{f_j\} \quad (28)$$

Si además se desea reducir los errores en algunos puntos se introduce una matriz diagonal de pesos; así, la ec 28 queda

$$[\bar{a}_{jq}]^T [W] [a_{jq}] \{b_q\} = [\bar{a}_{jq}]^T [W] \{f_j\} \quad (29)$$

Los elementos de la diagonal de la matriz $[W]$ son números iguales o mayores que la unidad.

La solución del sistema de ecuaciones se llevará a cabo factorizando la matriz de coeficientes resultante y haciendo sustituciones recursivas.

Conocido el vector $\{b_q\}$, la ec 14 permite calcular los desplazamientos u_z en cualquier punto de la región E. La amplitud y la fase de u_z están dadas por

$$|u_z| = \sqrt{[\text{Re}(u_z)]^2 + [\text{Im}(u_z)]^2} \quad (30)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(u_z)}{\text{Re}(u_z)} \right) \quad (31)$$

respectivamente. En estas expresiones $\text{Re}(\cdot)$ = parte real de (\cdot) , $\text{Im}(\cdot)$ = parte imaginaria de (\cdot) .

4. RESULTADOS

Para aplicar el método descrito se elaboró un programa para computadora el cual se describe ampliamente en la ref 12.

A fin de comprobar la bondad del método, se aplicó para un cañón semicircular con radio a para cuatro diferentes ángulos de incidencia (0° , 30° , 60° y 90°) obteniéndose los desplazamientos en varios puntos de la superficie. En las figs 4 a 7 se presentan los espectros de amplitudes obtenidos en función de la frecuencia normalizada y el ángulo de incidencia. Para este problema existe solución analítica (3); al calcularla se encontró buena concordancia con los resultados obtenidos para los desplazamientos empleando el método propuesto: las diferencias no exceden de uno por ciento. El número de fuentes necesario para que se mantengan estas diferencias inferiores a uno por ciento es función creciente de la frecuencia. Para el cañón semicircular este número es aproximadamente $5 + 3ka$ donde a = radio del cañón, $k = \omega/c_s$. Las fuentes se distribuyeron uniformemente en una circunferencia con radio igual a $a/2$. Se tomó el número de fuentes igual al número de puntos de colocación.

En las figs 8 a 10 se presentan valores de amplitudes y fases en la superficie de un cañón semielíptico, con profundidad igual al ancho del cañón en $y = 0$, para tres diferentes frecuencias normalizadas ($k\alpha = \pi/4, \pi/2, \pi$) y cuatro ángulos de incidencia ($0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ y 90°). Para lograr estabilidad y convergencia el número de fuentes necesario es aproximadamente $10 + 6 k\alpha$ donde α = semieje menor de la elipse. Las fuentes se colocaron en una elipse con semiejes menor y mayor de 0.8α y 1.8α , respectivamente, y se tomaron 99 puntos de colocación en la frontera. La concordancia de estos resultados con los obtenidos analíticamente (4) es excelente.

Las figs 11 y 12 exhiben amplitudes y fases en la superficie de un cañón de sección triangular con taludes a 45° y profundidad a , para dos frecuencias normalizadas ($k\alpha = \pi/2, \pi$) y tres ángulos de incidencia ($0^\circ, 45^\circ$ y 90°). Se colocaron fuentes a lo largo de líneas paralelas a los taludes separadas de estos una distancia $0.07a$. Se tomaron 99 puntos de colocación en la frontera. En los cálculos, el vértice del cañón se ha suavizado empleando un segmento de circunferencia tangente a los bordes.

Las amplitudes de los desplazamientos tienden a 2 para valores pequeños de $k\alpha$ a los que corresponden longitudes de onda grandes (pues $k\alpha = 2\pi a/\lambda$, donde λ = longitud de onda). Así con longitudes de onda mucho mayores que las dimensiones del cañón se tiende a la solución de campo libre. Esto equivale a hacer tender las dimensiones del cañón a cero con k fija.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un método para resolver el problema de difracción de ondas SH planas por depresiones bidimensionales (cañones) de forma arbitraria. El método se basa en el principio de superposición; se combina la solución de campo libre con soluciones elementales o fuentes cuyas amplitudes se determinan de manera que en puntos de la frontera se satisfaga la condición de esfuerzo nulo; se emplea un criterio de colocación y mínimos cuadrados. El número de fuentes es función creciente de la frecuencia y de las dimensiones del cañón. Se ha definido un criterio aproximado para determinar dicho número.

Las fuentes se han colocado a lo largo de una curva interior que tiene la misma forma que la superficie del cañón. Esta disposición está, aparentemente, cercana a la óptima.

Para ondas de incidencia vertical ($\gamma = 0^\circ$) en el cañón semicircular se tienen amplificaciones de 50 por ciento en los bordes y en la vecindad del cañón y reducciones del mismo orden en el fondo. Para los cañones semielíptico y triangular se aprecian reducciones de 50-70 por ciento en el fondo y amplificaciones de 30 por ciento en los bordes.

A medida que el ángulo de incidencia es mayor, el cañón actúa como una barrera de ondas sísmicas ocasionando reducciones importantes en uno de los bordes y grandes amplificaciones en el otro. Para las secciones semicircular y semielíptica la máxima amplificación que se alcanza es cercana al 100 por ciento que de hecho es el valor límite, pues para frecuencias altas el borde del cañón se comporta como medio semiespacio.

Aun cuando estas conclusiones se refieren a ondas SH solamente, cabe esperar resultados similares para ondas incidentes P o SV.

6. RECOMENDACIONES

El método presentado puede extenderse a los casos de ondas incidentes P o SV si se construyen las soluciones elementales para fuentes de esos tipos de ondas. Así se contemplarían de manera cuantitativa excitaciones de carácter más general.

El método es también aplicable al estudio de difracción de ondas sísmicas por valles aluviales (para ondas SH sería una extensión natural de este estudio).

7. RECONOCIMIENTOS

Se agradecen los comentarios y sugerencias de Gustavo Avala, Luis Esteva, Ismael Herrera, Federico Sabina y Shri K Singh, así como la colaboración de Jorge Esquivel durante la preparación del trabajo.

8. REFERENCIAS

1. Rosenblueth, E, "Soil and rock mechanics in earth quake engineering", presentado en el *International Symposium on Dynamical Methods in Soil and Rock Mechanics (DMSR 77)*, Karlsruhe, Alemania (sep 12-16, 1977), en prensa
2. Ruiz, S, "Influencia de las condiciones locales en las características de los sismos", *Instituto de Ingeniería, UNAM*, 387 (1977)
3. Trifunac, M D, "Scattering of plane SH waves by a semi-cylindrical canyon", *Earthq Engrg and Structl Dyn*, 1 (1973), 267-281
4. Wong, H L y Trifunac, M D, "Scattering of plane SH waves by a semielliptical canyon", *Earthq Engrg and Structl Dyn*, 3 (1974), 157-169
5. Singh, S K y Sabina, F J, "Ground-motion amplification by topographic depressions for incident P wave under acoustic approximation", *Bull Seism Soc Am*, 67, 2 (1977), 345-352
6. Wong, H L y Jennings, P C, "Effects of canyon topography on strong ground motion", *Bull Seism Soc Am*, 65, 5 (1975), 1239-1257
7. Boore, D M, "A note on the effect of simple topography on seismic SH waves", *Bull Seism Soc Am*, 62, 1 (1972), 275-284
8. Ewing, W M, Jardetzky, W S y Press, F, *Elastic waves in layered media*, McGraw-Hill Book Co, Nueva York (1957)
9. Sommerfeld, A, *Partial differential equations in physics*, Academic Press Inc, Nueva York (1949)
10. Ng, S F, "A collocation least square solution of boundary value problems in applied mechanics", en *Computer aided engineering*, Gladwell, G M L ed, *University of Waterloo Press*, Ontario, Canadá (1971), 395-402
11. Bouchon, M, "Effect of topography on surface motion", *Bull Seism Soc Am*, 63, 3 (1973), 615-632
12. Sánchez-Sesma, F J y Rosenblueth, E, "Evaluación del riesgo-efectos locales. Etapa I. Movimiento del terreno en depresiones bidimensionales de forma arbitraria ante incidencias de ondas SH planas", *Instituto de Ingeniería, UNAM* (1978)

APENDICE A. NOTACION

En este escrito se emplean los siguientes símbolos:

A	= matriz de coeficientes complejos
a	= radio del cañón semicircular, mitad del ancho del cañón
a_{jq}	= elemento de la matriz A
b_q	= amplitud de la fuente q
c_s	= velocidad de propagación de las ondas S
$c_x = c_s / \sin \gamma$	= velocidad aparente en x
$c_y = c_s / \cos \gamma$	= velocidad aparente en y
E	= región exterior
e	= base de los logaritmos naturales
f_j	= elemento del vector de términos independientes
G	= módulo de elasticidad al cortante
$H_0^{(2)}(\cdot)$	= función de Hankel de segunda clase y orden cero
$\text{Im}(\cdot), \text{Re}(\cdot)$	= partes imaginaria y real de (\cdot), respectivamente
$i = \sqrt{-1}$	= unidad imaginaria
$J_0(\cdot)$	= función de Bessel de primera clase y orden cero
$J_1(\cdot)$	= función de Bessel de primera clase y orden uno
k	= ω / c_s
M	= número de puntos en la frontera S
N	= número de fuentes
n	= normal en la frontera
P	= punto de coordenadas (x,y)
P_0	= punto de coordenadas (x_0, y_0)
\vec{r}	= vector de posición del punto P

- \bar{r}_0 = vector de posición del punto P_0
- r_1 = distancia de un punto P_j a la fuente q
- r_2 = distancia de un punto P_j a la fuente imagen q
- S = frontera del cañón
- t = tiempo
- u_z = desplazamiento en la dirección z
- $u_z^{(i)}$ = desplazamiento de la onda incidente
- $u_z^{(r)}$ = desplazamiento de la onda reflejada
- $u_z^{(0)}$ = desplazamiento de campo libre
- $u_z^{(d)}$ = desplazamiento de las ondas difractadas
- u_{zq}^* = desplazamiento debido a la fuente q
- W = matriz diagonal de pesos
- x = coordenada cartesiana
- y = coordenada cartesiana
- $Y_0(\cdot)$ = función de Bessel de segunda clase y orden cero
- $Y_1(\cdot)$ = función de Bessel de segunda clase y orden uno
- γ = ángulo de incidencia
- θ = ángulo que forman la normal n y el eje x
- λ = longitud de onda
- $\delta(\cdot)$ = delta de Dirac
- ρ = densidad del medio
- τ = esfuerzo cortante
- ϕ = fase de u_z
- ω = frecuencia circular
- $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ = operador laplaciano

APENDICE B. COLOCACION Y MINIMOS CUADRADOS

El método de colocación y mínimos cuadrados ha sido aplicado con éxito en la solución de problemas de valores en la frontera (10). El método consiste en seleccionar un número de puntos de colocación mayor que el número de parámetros libres de la solución aproximada; el sistema de ecuaciones estará entonces sobredeterminado. La solución se obtiene al minimizar el error cuadrático. Cuando se trata con sistemas complejos se procede de la siguiente manera.

Considérese el sistema sobredeterminado

$$Az = C \tag{B.1}$$

donde

- A matriz de coeficientes complejos = $a + ib$
- z vector de incógnitas = $x + iy$
- C vector de términos independientes = $c + id$
- a, b partes real e imaginaria de A
- x, y partes real e imaginaria de z
- c, d partes real e imaginaria de C

Las partes real e imaginaria del vector error asociado al sistema B.1 son

$$\epsilon_1 = ax - by - c \tag{B.2}$$

y

$$\epsilon_2 = bx + ay - d \tag{B.3}$$

Sea E el error cuadrático definido por

$$E = \epsilon_1^T \epsilon_1 + \epsilon_2^T \epsilon_2 \tag{B.4}$$

Las condiciones de mínimo para E son

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 \tag{B.5}$$

y

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \tag{B.6}$$

Sustituyendo las ecs B.2 y B.3 en B.4 y aplicando B.5 y B.6 se obtiene

$$(a^T a + b^T b)x - (a^T b - b^T a)y = a^T c + b^T d \tag{B.7}$$

$$(a^T b - b^T a)x + (a^T a + b^T b)y = a^T d - b^T c \tag{B.8}$$

que es equivalente a la ecuación

$$\bar{A}^T A z = \bar{A}^T C \tag{B.9}$$

donde \bar{A} = matriz conjugada de A .

Si se desea dar diferentes pesos a las ecuaciones del sistema de la ec B.1, se puede obtener que

$$\bar{A}^T W A z = \bar{A}^T W C \tag{B.10}$$

donde $[W]$ = matriz diagonal que contiene los pesos asociados a cada ecuación.

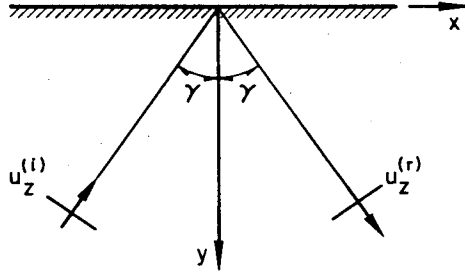


Fig 1. Ondas SH incidente y reflejada

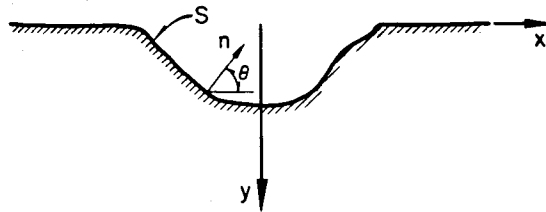


Fig 2. Cañón de geometría irregular

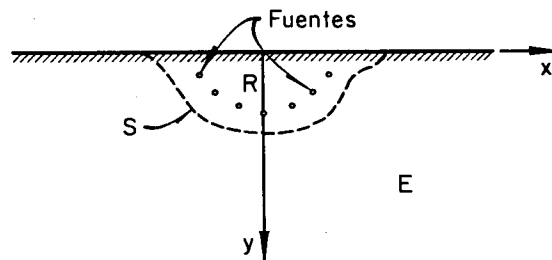


Fig 3. Regiones R,E, frontera S y fuentes

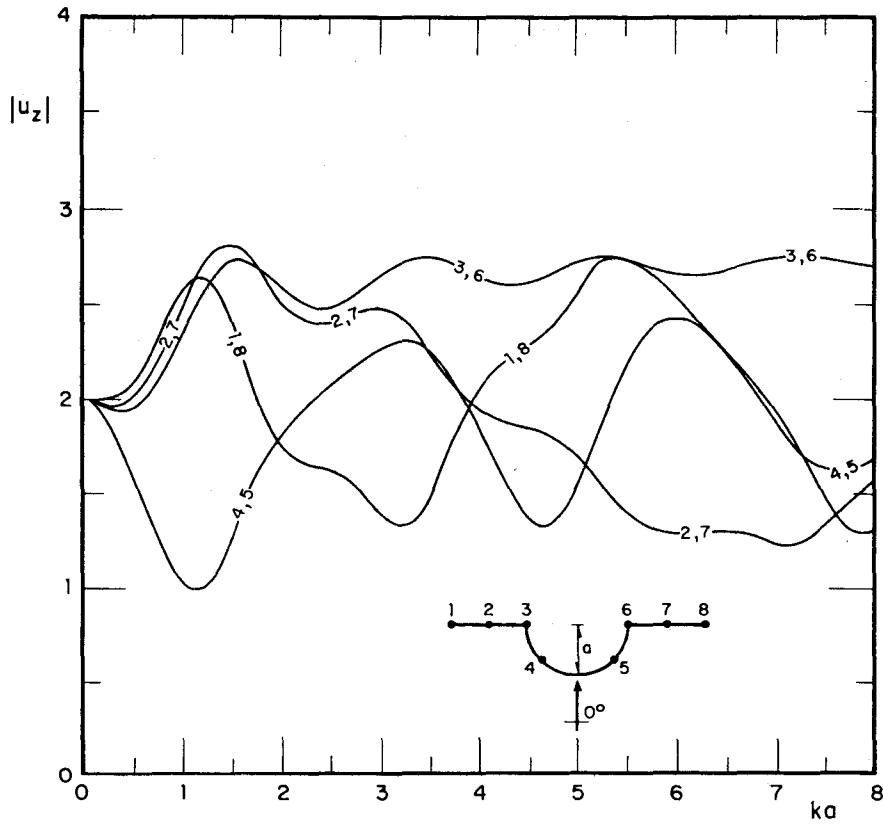


Fig 4. Espectros de amplitudes ($\gamma=0^\circ$),cañón semicircular

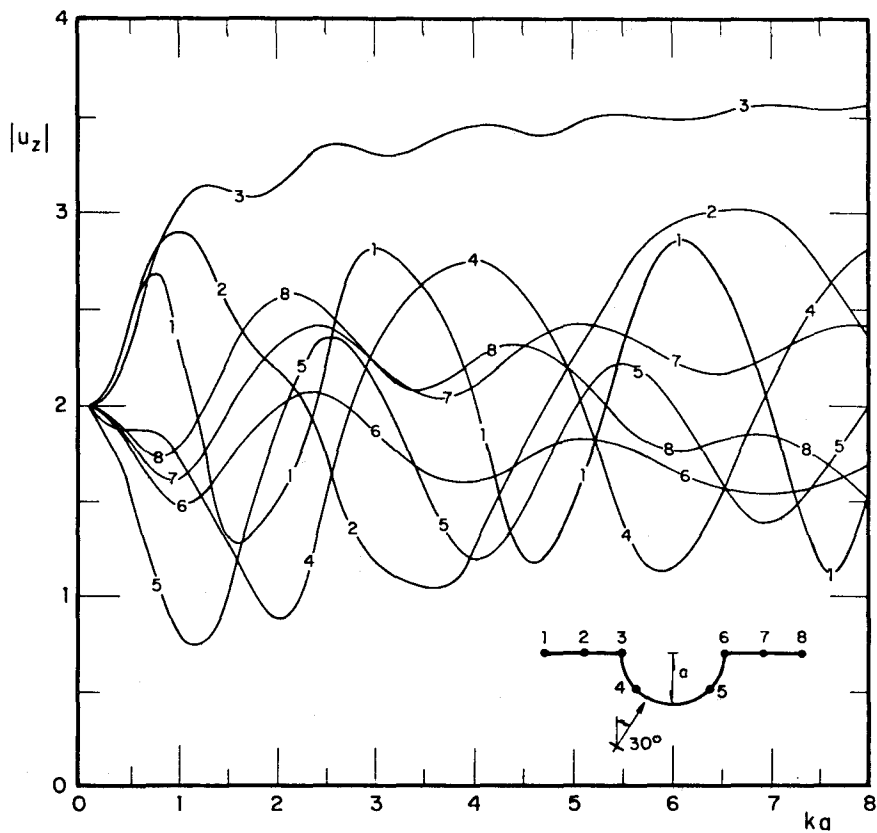


Fig 5. Espectros de amplitudes ($\gamma=30^\circ$),cañón semicircular

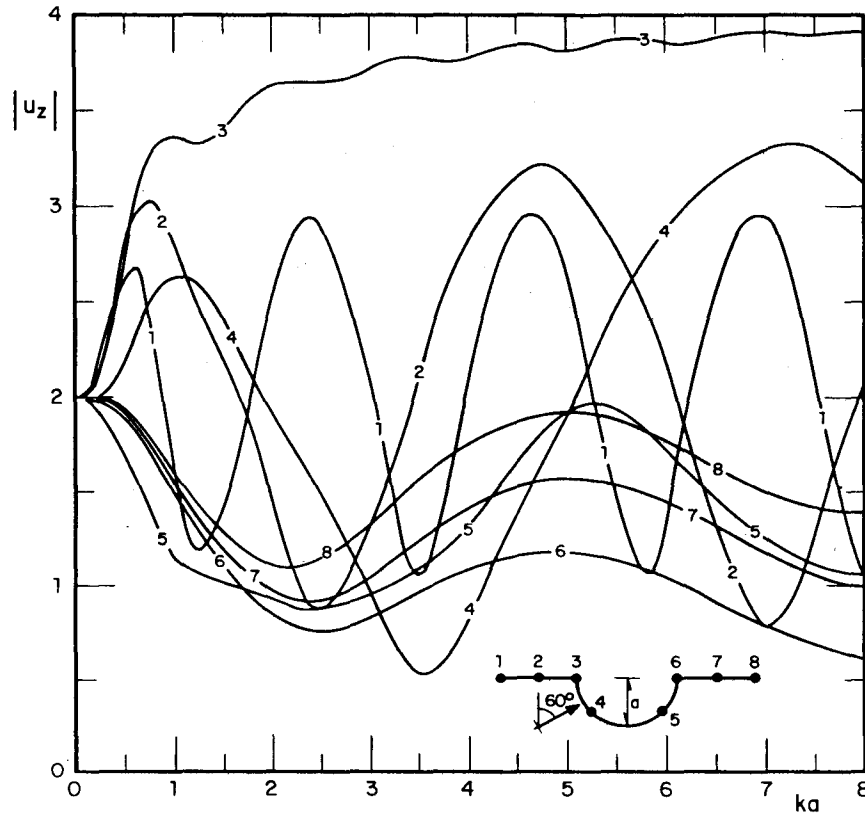


Fig 6. Espectros de amplitudes ($\gamma=60^\circ$), cañón semicircular

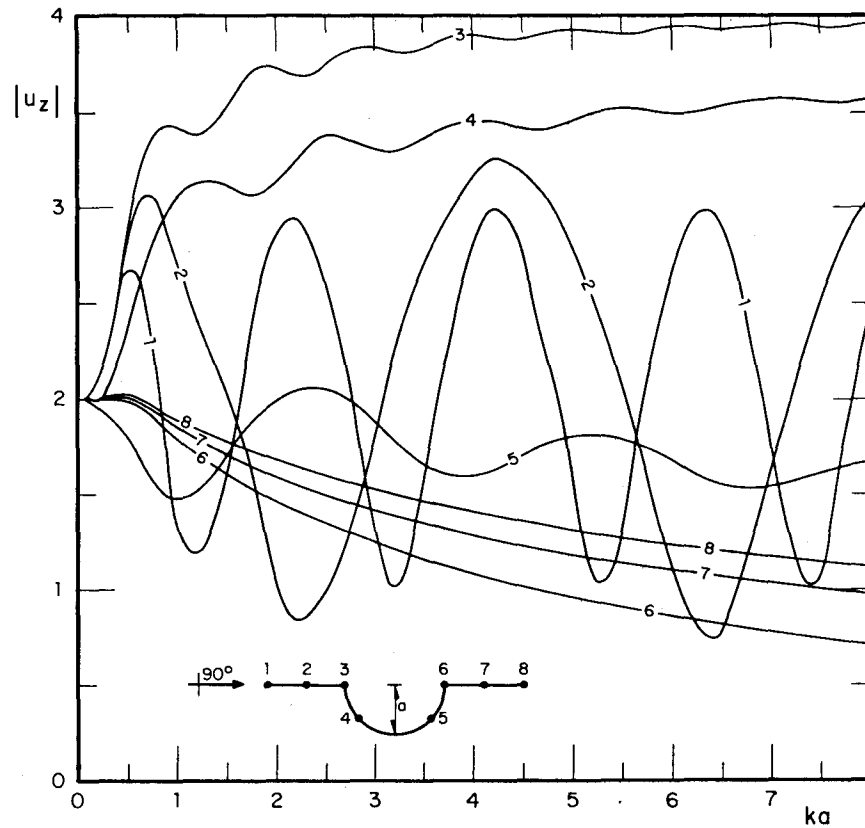


Fig 7. Espectros de amplitudes ($\gamma=90^\circ$), cañón semicircular

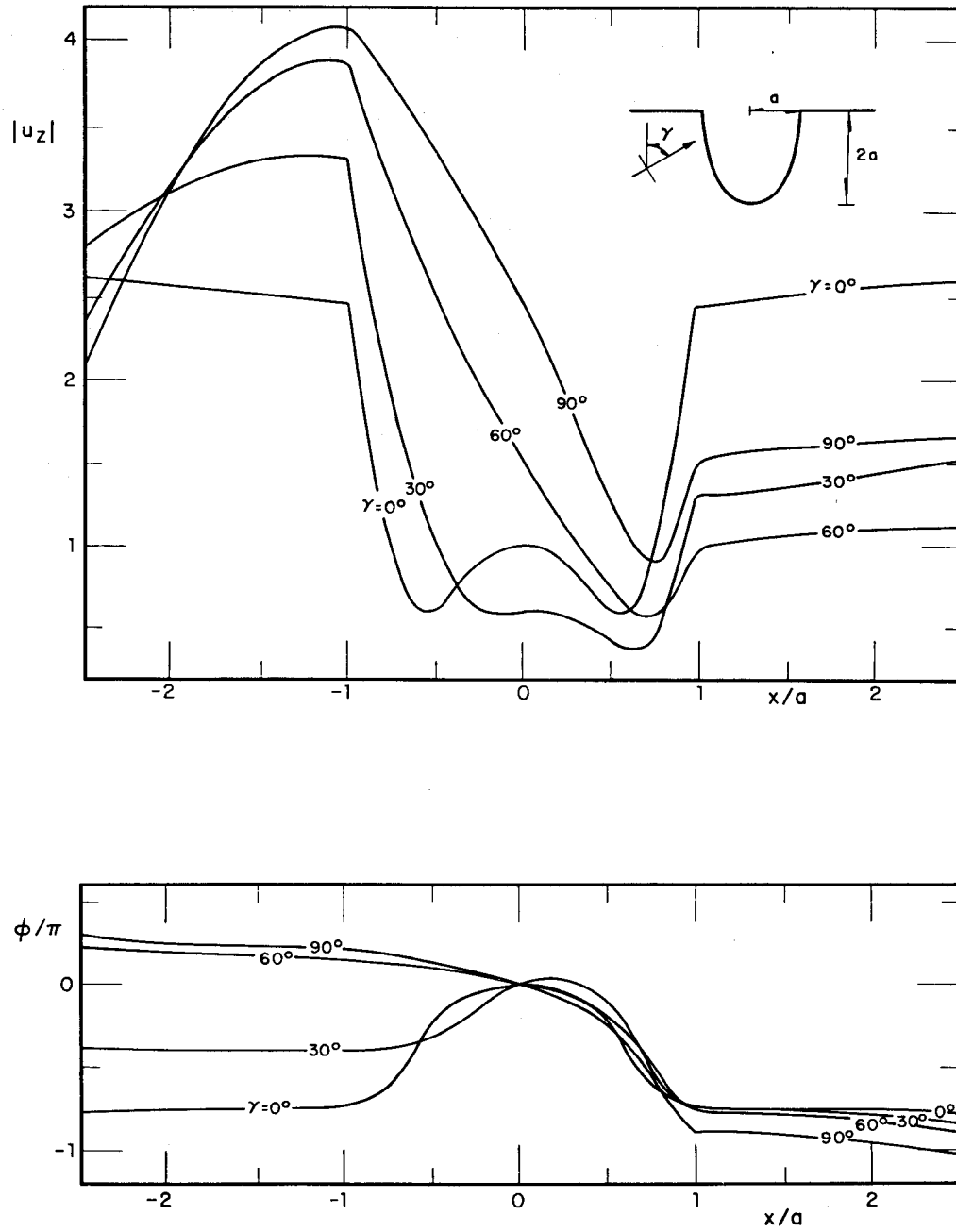


Fig 8. Amplitudes y fases ($ka = \pi/4$), cañón semielíptico

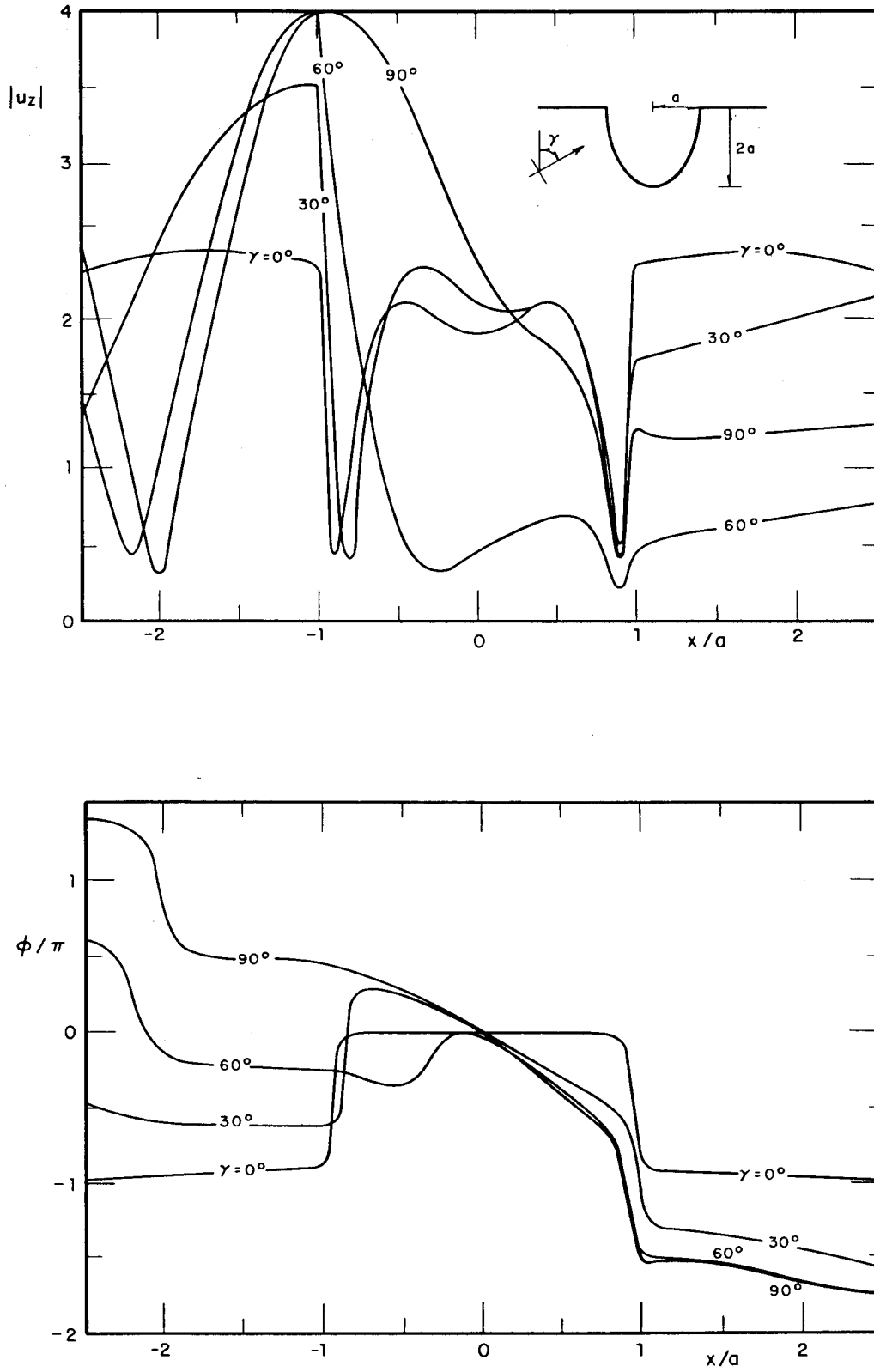


Fig 9. Amplitudes y fases ($ka = \pi/2$), cañón semielíptico

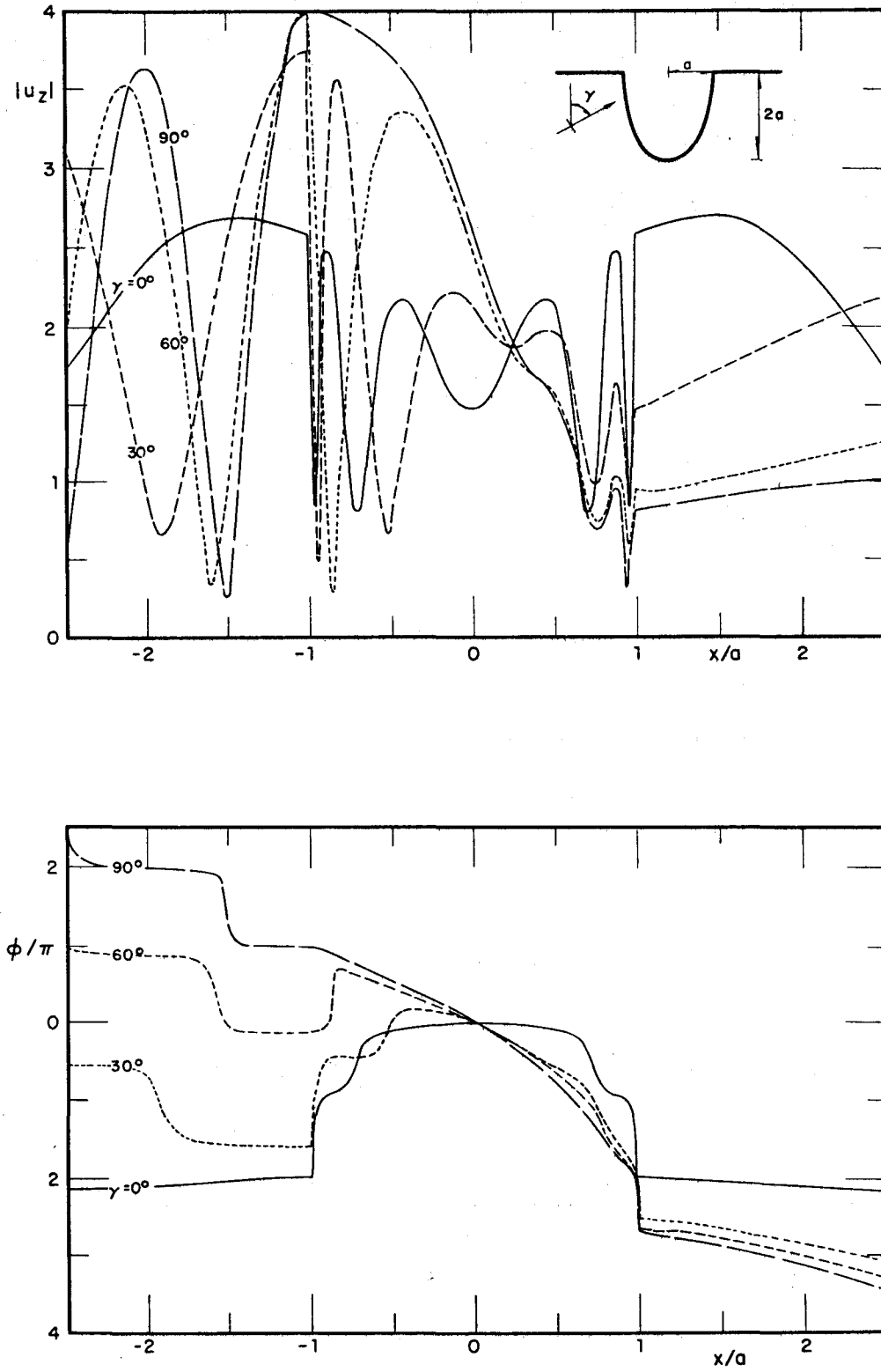


Fig 10. Amplitudes y fases ($ka = \pi$), cañón semielíptico

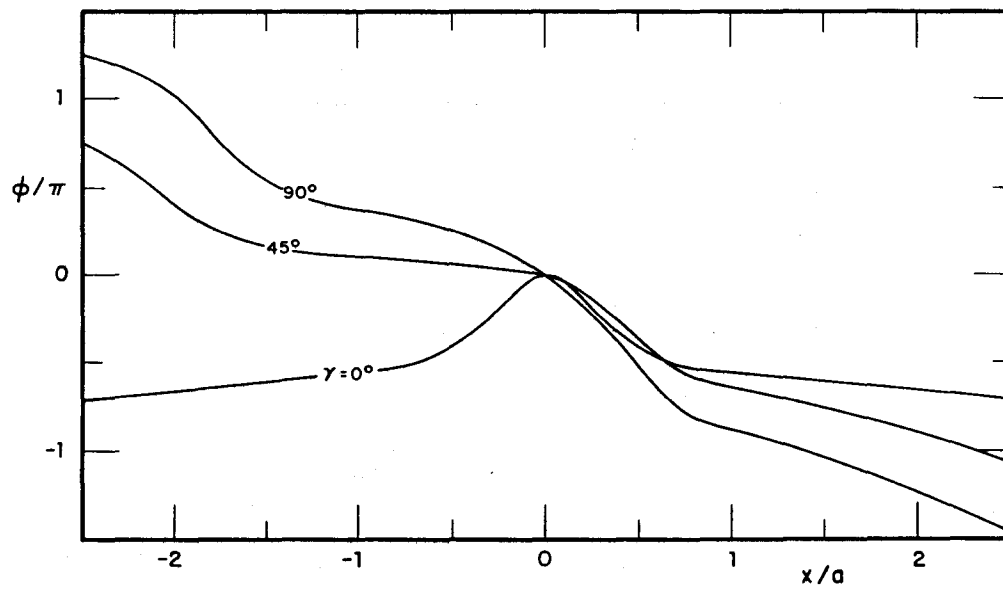
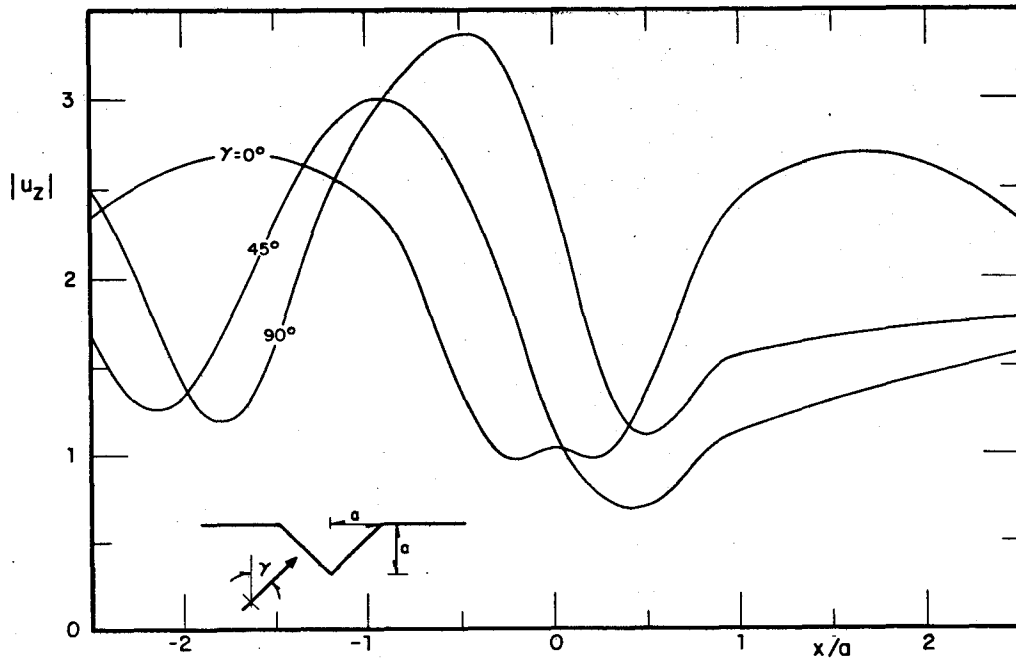


Fig 11. Amplitudes y fases ($ka = \pi/2$), cañón triangular

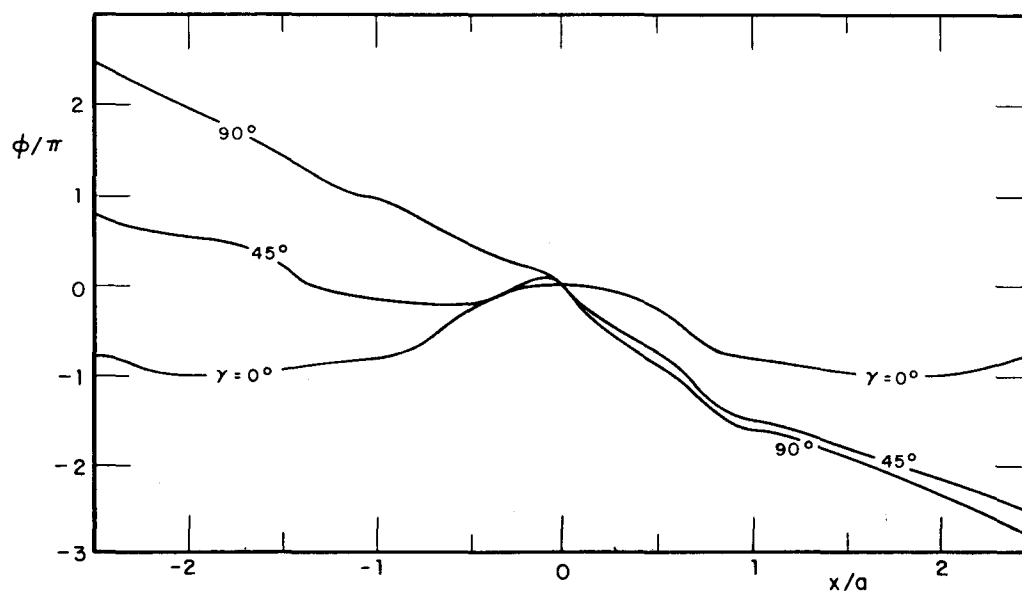
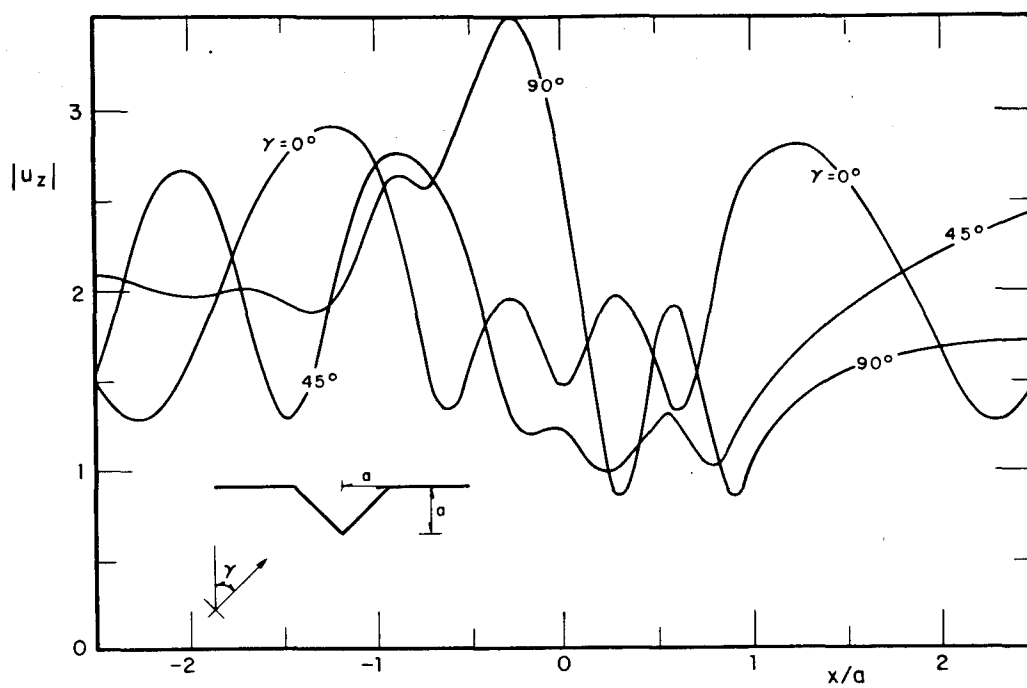


Fig 12. Amplitudes y fases ($ka = \pi$), cañón triangular