

# MODELO NUMERICO EFICIENTE DE APLICACION EN ESTUDIOS DE AMPLIFICACION DINAMICA

por

G. R. Aranda\* y G. A. Ayala\*

## RESUMEN

Se discute la formulación numérica para el problema de propagación de ondas. Se presentan condiciones adecuadas para modelar dominios finitos mediante fronteras ficticias. Del empleo de esta metodología en problemas de amplificación dinámica se deriva un modelo numérico general. Se comparan los resultados de un ejemplo numérico con resultados analíticos disponibles.

## INTRODUCCION

La formulación numérica de problemas de amplificación dinámica en depósitos de suelo sujetos a excitación sísmica, generalmente restringe el dominio de soluciones a una región limitada por fronteras ficticias. La representación adecuada de la naturaleza seminfinita de estos depósitos, mediante un modelo de extensión limitada, hace necesario definir en sus fronteras condiciones que eviten o minimicen la reflexión artificial de ondas que inciden en ellas.

Por ejemplo, en las refs 3 y 6 se han definido condiciones de frontera que permiten absorber o transmitir ondas, en forma aproximada, que se propagan hacia afuera de la región en estudio. También se han desarrollado condiciones que permiten el paso libre, tanto de las ondas que inciden a la región como de las que lo abandonan; a este tipo de condiciones se les ha denominado "fronteras activas" (ref 1). Sin embargo, las fronteras activas son solo otra aproximación del problema real, ya que en su formulación se supone que en la frontera únicamente existen ondas planas que se propagan en dirección normal a la misma.

Los objetivos del presente trabajo son: a) Diseñar condiciones de frontera que permitan de manera aproximada transmitir ondas que se propaguen con diferentes direcciones y b) Definir una metodología general de utilidad en la solución numérica de problemas de propagación de ondas sísmicas en depósitos de suelo.

La formulación que se presenta es general ya que puede aplicarse a problemas bi o tridimensionales; además, no existe la restricción de que la re-

---

\* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

gión en estudio sea un depósito de suelo apoyado sobre una base infinitamente rígida. La potencialidad de esta formulación se ilustra con un ejemplo numérico.

#### FRONTERAS ACTIVAS

Por sencillez, se considera el problema de propagación unidimensional de ondas de corte cuya ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (1)$$

donde  $u_2$  = componente de desplazamiento normal a la dirección de propagación;  $x_1$  = coordenada orientada en la dirección de propagación;  $C_s$  = celeridad de las ondas de corte y  $t$  = tiempo.

La solución general de la ec 1 puede escribirse como

$$u_2 = f_2 (x_1 - C_s t) + F_2 (x_1 + C_s t) \quad (2)$$

donde  $f_2$  y  $F_2$  son funciones cualesquiera diferenciables con respecto a sus argumentos.

En la interpretación física de la ec 2,  $f_2$  representa una perturbación que se propaga con velocidad  $C_s$ , en dirección positiva del eje  $x_1$ , y  $F_2$  otra análoga que se propaga en dirección negativa (fig 1). Así, si  $u_2$  describe el desplazamiento producido por un temblor en el punto  $x_1 = a$ ,  $f_2$  es la parte de  $u_2$  que se transmite a la región  $x_1 > a$  (ondas incidentes) y  $F_2$  la parte que abandona la región (ondas reflejadas).

Para este caso, se demuestra (ref 1) que la condición de frontera que se obtiene está dada por

$$t_2 = \rho C_s (2\dot{f}_2 - \dot{u}_2) \quad (3)$$

donde  $t_2$  = esfuerzo externo a una frontera cuya normal es de sentido contrario al de propagación de las ondas incidentes;  $\rho$  = densidad de masa, y el punto significa derivación con respecto al tiempo.

La formulación anterior puede generalizarse fácilmente para ondas de cuerpo del tipo compresional; en este caso, el esfuerzo horizontal externo asociado con una perturbación que viaja a lo largo del eje  $x_1$ , se expresa como

$$t_1 = \rho C_p (2\dot{f}_1 - \dot{u}_1) \quad (4)$$

donde  $C_p$  = celeridad de ondas de compresión; el subíndice 1 indica que las variables están asociadas al movimiento de partícula en la dirección del eje  $x_1$  (fig 1).

Cuando el tren de ondas está formado por ondas P, SV y SH, las condiciones de esfuerzo para una frontera normal a la dirección de propagación (eje  $x_1$ ) se establecen como

$$t_1 = \rho C_p (2\dot{f}_1 - \dot{u}_1) \quad (5)$$

$$t_i = \rho C_s (2\dot{f}_i - \dot{u}_i); \quad i = 2, 3 \quad (6)$$

#### FRONTERAS ACTIVAS EFICIENTES

En un problema de propagación de ondas sísmicas no es sencillo determinar la dirección con la cual estas inciden o se reflejan en una frontera dada. Desde un punto de vista ingenieril existe una aproximación para transmitir adecuadamente estas ondas; consiste en suponer que el frente tiene una dirección de propagación normal a la frontera (ref 5).

En esta parte del trabajo se desarrolla una forma relativamente simple de incluir, de manera eficiente, el ángulo de incidencia en la formulación de las fronteras activas.

Considérese un tren de ondas planas P y SV que se propaga en dirección del eje  $x_1$  (fig 2). Si se supone que las ondas P y SV tienen igual dirección de propagación, definida por el ángulo  $\theta$ , el estado de esfuerzos en una partícula ubicada en el frente de ondas, está dado por

$$\bar{\sigma}_{11} = -\rho C_p (2\dot{f}_1 - \dot{u}_1)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = -\rho C_s (2\dot{f}_2 - \dot{u}_2) \quad (7)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = -\rho (C_p - 2s C_s) (2\dot{f}_1 - \dot{u}_1)$$

donde  $\bar{\sigma}_{ij}$  = tensor de esfuerzos;  $s = C_s/C_p$ , y la 'testa' indica que las variables están referidas al sistema de ejes en el cual  $x_1$  coincide con la dirección de propagación.

La representación matricial de las ecs 7 es

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = -\rho \begin{Bmatrix} C_p & | & 0 \\ H & | & 0 \\ 0 & | & C_s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

siendo  $H = (C_p - 2s C_s)$ ;  $\dot{U}_1 = 2\dot{f}_1 - \dot{u}_1$ ;  $\dot{U}_2 = 2\dot{f}_2 - \dot{u}_2$

Los esfuerzos dados por la ec 8, se pueden expresar en sistema de ejes coordenados  $x_1$  y  $x_2$  (fig 2) mediante las reglas de transformación para tensores y vectores (ref 5), lo cual conduce a la ec 9

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} = -\rho \left[ \begin{array}{c|c} C_p \cos^3 \theta & (C_p - 2C_s) \sin \theta \cos^2 \theta \\ (H + 2C_s) \sin^2 \theta \cos \theta & + H \sin^3 \theta \\ \hline (C_p - 2C_s) \sin^2 \theta \cos \theta & C_p \sin^3 \theta + \\ + H \cos^3 \theta & (H + 2C_s) \sin \theta \cos^2 \theta \\ \hline (C_p - H - C_s) \sin \theta \cos^2 \theta & (C_p - H - C_s) \sin^2 \theta \cos \theta \\ + C_s \sin^3 \theta & + C_s \cos^3 \theta \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{array} \right\} \quad (9)$$

que en forma compacta se escribe como

$$\underline{\sigma} = A \underline{\dot{U}} \quad (10)$$

donde  $\underline{\sigma}$  = vector de esfuerzos en el punto considerado, referido al sistema de ejes  $x_1$  y  $x_2$ ;  $A$  = matriz que depende de las propiedades del material y del ángulo de incidencia de las ondas, y  $\underline{\dot{U}}$  = vector de velocidades, definido como

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= 2\dot{f}_1 - \dot{u}_1 \\ \dot{U}_2 &= 2\dot{f}_2 - \dot{u}_2 \end{aligned}$$

En la ec 10, los elementos de la matriz  $A$  se pueden aproximar por elementos de una matriz  $A^*$ , independientes del ángulo  $\theta$ , si para cada uno de los términos correspondientes de estas matrices se garantiza que

$$|A_{ij} - A^*_{ij}| < \epsilon, \forall i, j \quad (11)$$

con

$$E = A - A^*$$

donde  $\epsilon$  = tolerancia,  $A^*$  = matriz de aproximaciones y  $E$  = matriz de errores.

De la fig 2 se observa que para una frontera vertical el intervalo de incidencias de las ondas sísmicas está dado por  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ . Además, como los elementos de  $E$  pueden tener cualquier signo algebraico, es conveniente elevarlos al cuadrado. Así, el error cuadrático medio,  $J_{ij}$ , para el intervalo de incidencias considerado, se define como

$$J_{ij} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E_{ij}^2(\theta) d\theta; \quad \forall i, j \quad (12)$$

En la medida en que los errores  $E_{ij}$  sean mínimos, la matriz  $A^*$  se estará aproximando de manera adecuada a la matriz  $A$ . Lo anterior se logra al minimizar  $J_{ij}$ , lo cual se conoce con el nombre de método de mínimos cuadrados.

Para fines de absorción, se sabe que la energía asociada a un frente de on-

das es proporcional al coseno de su ángulo de incidencia (ref 4). Esto se puede incluir en la ec 11 de la siguiente manera

$$|A_{ij} - A_{ij}^*| \cos \theta < \epsilon \quad (13)$$

Al sustituir esta última expresión en la ec 12, para una frontera vertical se obtiene

$$J_{ij} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (A_{ij} - A_{ij}^*)^2 \cos^2 \theta \, d\theta \quad (14)$$

Para que  $J_{ij}$  sea mínimo, entonces se deberá tener que

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial A_{ij}^*} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(A_{ij} - A_{ij}^*) \cos^2 \theta \, d\theta = 0 \quad (15)$$

De la ec 15 se obtiene que

$$A_{ij}^* = \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} A_{ij} \cos^2 \theta \, d\theta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta \, d\theta} \quad (16)$$

Con lo anterior, las condiciones de absorción de frontera activa eficiente, para una frontera vertical, se expresan como (ref 2)

$$\begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \end{Bmatrix} \text{ absorción} = \frac{8G}{15\pi} \begin{Bmatrix} \frac{1}{C_s} \left( \frac{5}{s} + 2 - 2s \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_s} (3 + 2s) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 - \dot{f}_1 \\ \dot{u}_2 - \dot{f}_2 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

donde  $t_n$  = esfuerzo de absorción normal a la frontera y  $t_t$  = esfuerzo tangencial.

Para una frontera horizontal, al integrar de 0 a  $\pi$  (dominio de absorción) y pesando por  $\sin^2 \theta$  los elementos de la matriz A, se obtiene que

$$\begin{Bmatrix} t_t \\ t_n \end{Bmatrix} \text{ absorción} = \frac{8G}{15\pi} \begin{Bmatrix} \frac{1}{C_s} \left( \frac{5}{s} + 2 - 2s \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_s} (2s + 3) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_2 - \dot{f}_2 \\ \dot{u}_1 - \dot{f}_1 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Para admitir eficientemente ondas que inciden a una frontera ficticia se parte de la ec 10, que en este caso se escribe de la siguiente forma

$$\underline{\sigma} \text{ incidente} = A \underline{\dot{f}} \quad (19)$$

aquí también debe cumplirse que

$$|A_{ij} - A_{ij}^{**}| < \epsilon$$

donde  $A^{**}$  es una matriz independiente del ángulo de incidencia.

Para encontrar la matriz  $A^{**}$  se usa el mismo criterio que condujo a la ec 14. Si la localización de la fuente excitadora es la indicada en la fig 2, se obtiene, para una frontera vertical que

$$A_{ij}^{**} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} A_{ij} d\theta \quad (20)$$

y la condición de esfuerzos en esta frontera es (ref 2)

$$\begin{Bmatrix} t_n \\ t_t \end{Bmatrix} = \frac{4G}{3\pi} \begin{Bmatrix} \frac{1}{C_s} \left( \frac{3}{s} + 2 - 2s \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_s} (2 + 2s) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{f}_1 \\ \dot{f}_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Para una frontera horizontal con intervalo de incidencias dado por  $0 < \theta < \pi/2$ , se tiene que

$$A_{ij}^{**} = \int_0^{\pi/2} A_{ij} d\theta \quad (22)$$

de donde resulta que

$$\begin{Bmatrix} t_t \\ t_n \end{Bmatrix} = \frac{2G}{3\pi} \begin{Bmatrix} \frac{1}{C_s} (2s + 1) & \frac{1}{C_s} (2s - 2) \\ \frac{1}{C_s} (2s - 2) & \frac{1}{C_s} \left( \frac{3}{s} - 2s + 2 \right) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{f}_2 \\ \dot{f}_1 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

Por otra parte, si solo existen ondas SH que se propagan en la dirección  $x'_1$ , el estado de esfuerzos en el frente de onda está dado por

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \cos \theta \bar{\sigma}_{13} \\ \sigma_{23} &= \sen \theta \bar{\sigma}_{13} \end{aligned} \quad (24)$$

donde

$$\bar{\sigma}_{13} = -\rho C_s (\dot{2f}_3 - \dot{u}_3)$$

Al aplicar los planteamientos que hacen eficiente una frontera activa, de manera análoga al caso de ondas P y SV, se obtiene que la condición de frontera activa para absorber energía asociada con las ondas sísmicas, se expresa como

$$t_t = \frac{8G}{3\pi C_s} (\dot{u}_3 - \dot{f}_3) \quad (25)$$

Si se sigue el desarrollo mencionado, se puede demostrar que la ec 25 es válida tanto para una frontera vertical como para una horizontal.

De manera similar, se obtiene que las condiciones para admitir las ondas que originan un campo de velocidades y que inciden en la frontera activa, se representan de manera eficiente como

$$t_t \text{ admisión} = \frac{4G}{3\pi C_s} \dot{f}_3 \quad (26)$$

En este caso se puede demostrar que la ec 26 también es válida para cualesquiera de las dos orientaciones de la frontera.

La extensión de la formulación de las fronteras activas a otros tipos de ondas sísmicas, se puede hacer siguiendo los mismos planteamientos. Así, específicamente para ondas de Rayleigh, los esfuerzos asociados con una frontera vertical están dados por

$$\begin{aligned} t_n &= a \rho C_p \dot{U}_1 \\ t_t &= b \rho C_s \dot{U}_2 \end{aligned} \quad (27)$$

donde a y b son coeficientes que dependen de la frecuencia de excitación y de la profundidad del punto considerado.

Por otra parte, también es posible definir de manera aproximada condiciones de frontera activa para problemas donde el material tenga un comportamiento viscoelástico. Si se tiene específicamente un sólido de Kelvin, definido por los parámetros G y  $\eta$  la ecuación de equilibrio dinámico está dada por

$$G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (28)$$

La velocidad aparente para un sólido de Kelvin se expresa como

$$C = \sqrt{\frac{G}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial}{\partial t}}$$

o bien

$$C_s^* = C_s \sqrt{1 + \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t}} \quad (29)$$

Ya que en los materiales geológicos  $\eta \ll G$ , de la expansión en serie de la ec 29 es posible despreciar términos de orden superior, lo que conduce a

$$C_s^* = C_s \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\eta}{G} \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (30)$$

Si se sustituye la ec 30 en la ec 4, resulta que el esfuerzo externo asociado con una onda de corte que se propaga en dirección horizontal es

$$t_2 = \rho C_s \dot{U}_2 + \frac{1}{2} \eta \sqrt{\frac{\rho}{G}} \ddot{U}_2 \quad (31)$$

La generalización de la ec 31 al caso de ondas compresionales sigue el mismo razonamiento empleado para un material elástico lineal.

#### MODELO NUMERICO GENERAL

La discrepancia entre soluciones analíticas y numéricas del tipo de elementos finitos o diferencias finitas, es comúnmente atribuible a condiciones impuestas en fronteras ficticias que limitan la extensión del modelo. Las condiciones que se presentan en los capítulos anteriores conducen a resultados satisfactorios (ref 2); sin embargo, su aplicación directa a problemas de amplificación dinámica desprecia información que generalmente minimiza la diferencia mencionada.

La ecuación de equilibrio dinámico, para un medio elástico lineal, que resulta de la discretización con elementos finitos y del uso de condiciones de fronteras activas (ref 1), se escribe

$$M \ddot{\tilde{V}} + K \tilde{V} = C_{ad} \dot{\tilde{V}}^+ - C_{ab} \dot{\tilde{V}}^- \quad (32)$$

donde M y K son las matrices de rigideces y de masas del sistema,  $\tilde{V}$  el vector de desplazamientos,  $C_{ad}$  y  $C_{ab}$  matrices de amortiguamiento viscoso que se obtienen de la inclusión de las condiciones de frontera del tipo dado por las ecs 21, 23 y 17, 18, respectivamente,  $\dot{\tilde{V}}^+$  y  $\dot{\tilde{V}}^-$  son vectores de velocidades en la frontera ficticia asociados con ondas que inciden al modelo y con ondas que lo abandonan, respectivamente.

En primer lugar, se considera que en la región de estudio no existen irregularidades topográficas, por lo que siempre es posible encontrar la solución analítica a este problema, la cual se denomina solución de campo libre o solución no perturbada. Si no hubiera perturbación, esta sería la solución del problema en las fronteras ficticias. Desafortunadamente, este no es el caso ya que existe una perturbación originada por la topografía irregular que no se ha considerado en esta solución. Esto es, al vector  $\dot{\tilde{V}}_{CL}^*$  debe añadirse un exceso  $\dot{\tilde{V}}_E$  del cual no se conocen sus características. Una manera de lograr la absorción es utilizar condiciones de frontera dadas por las ecs 17 y 18 con lo que la ec 32 se transforma en:

$$M \ddot{\tilde{V}} + K \tilde{V} = C_{ad} \dot{\tilde{V}}^+ - C_{ab} \dot{\tilde{V}}_{CL}^- - C_{ef} \dot{\tilde{V}}_E \quad (33)$$

donde  $C_{ef}$  es la matriz de amortiguamiento resultante de las condiciones dadas por las ecs 17 y 18.

Obsérvese que el vector  $\dot{\tilde{V}}_E$  se puede escribir como

$$\dot{\tilde{V}}_E = \dot{\tilde{V}} - \dot{\tilde{V}}_{CL} \quad (34)$$

La ecuación de equilibrio dinámico del modelo general resulta:

$$M \ddot{\tilde{v}} + C_{ef} \dot{\tilde{v}} + K \tilde{v} = C_{ad} \dot{\tilde{v}}^+ - C_{ab} \dot{\tilde{v}}^- + C_{ef} \dot{\tilde{v}}_G \quad (35)$$

#### EJEMPLOS NUMERICOS

Con objeto de mostrar la aproximación obtenida al emplear la ec 35, se estudió la amplificación dinámica, en la superficie de un valle de aluvión semicilíndrico (fig 3), de ondas incidentes planas SH. La fig 4 muestra la aproximación de los resultados numéricos cuando se comparan con los analíticos correspondientes obtenidos por Trifunac (ref 7).

#### CONCLUSIONES

Ya que la hipótesis fundamental de este trabajo es considerar la existencia de ondas planas únicamente, los resultados obtenidos son tan solo una aproximación del problema original. Sin embargo, el hecho de que la absorción se aplique solo al exceso de campo libre conduce a resultados que, como los mostrados en la fig 4, son bastante cercanos a sus soluciones analíticas. La adaptación de la formulación dada por la ec 35 a programas de cálculo existentes es directa ya que solo se necesita redefinir la matriz de amortiguamiento y el vector de cargas del sistema, los que son fácilmente calculables.

Nótese que en la aplicación de esta formulación no es necesario definir una base rígida y que además admite cualquier variación espacial de la excitación.

#### REFERENCIAS

1. Ayala, G A, y Aranda, G R, "Boundary conditions in soil amplifications studies", Contributions of the Institute of Engineering to the Sixth World Conference on Earthquake Engineering, *Instituto de Ingeniería, UNAM*, E-22, México, D F (ene 1977)
2. Aranda, G R, "Formulación numérica del problema de propagación de ondas", Tesis de maestría, *División de Estudios Superiores, Facultad de Ingeniería, UNAM*, México, D F (1977)
3. Engquist, B y Majda, A, "Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves", Procs, National Academy of Sciences, *Applied Mathematical Sciences*, 74, 5 (1977), 1765-1766
4. Ewing, W M, Jardetzky, W S y Press, F, "Elastic waves in layered media", *Mc Graw-Hill Book Co, Inc*, Nueva York (1957)
5. Karamcheti, K, "Vector analysis and cartesian tensors with selected applications", *Holden Day* (1967)
6. Lysmer, J y Kuhlemeyer, R L, "Finite dynamic model for infinite media", *Journal Engineering Mechanics Division, ASCE*, 95, EM4 (1969), 859-877
7. Trifunac, M D, "Surface motion of a Semi-cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves", *Bulletin of the Seismological Society of America*, 61, 6 (dic 1971), 1755-1770

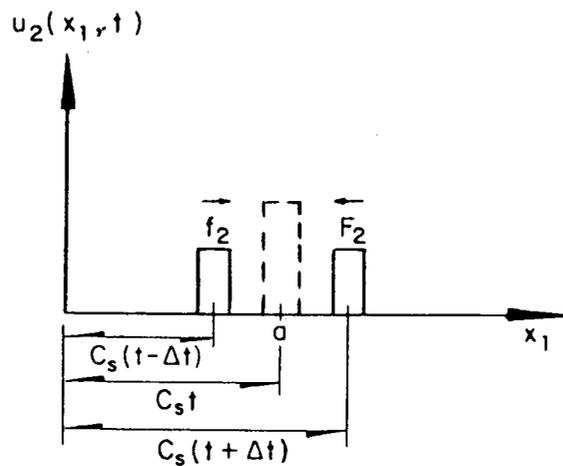


Fig 1. Onda del corte propagándose en dirección del eje  $X_1$

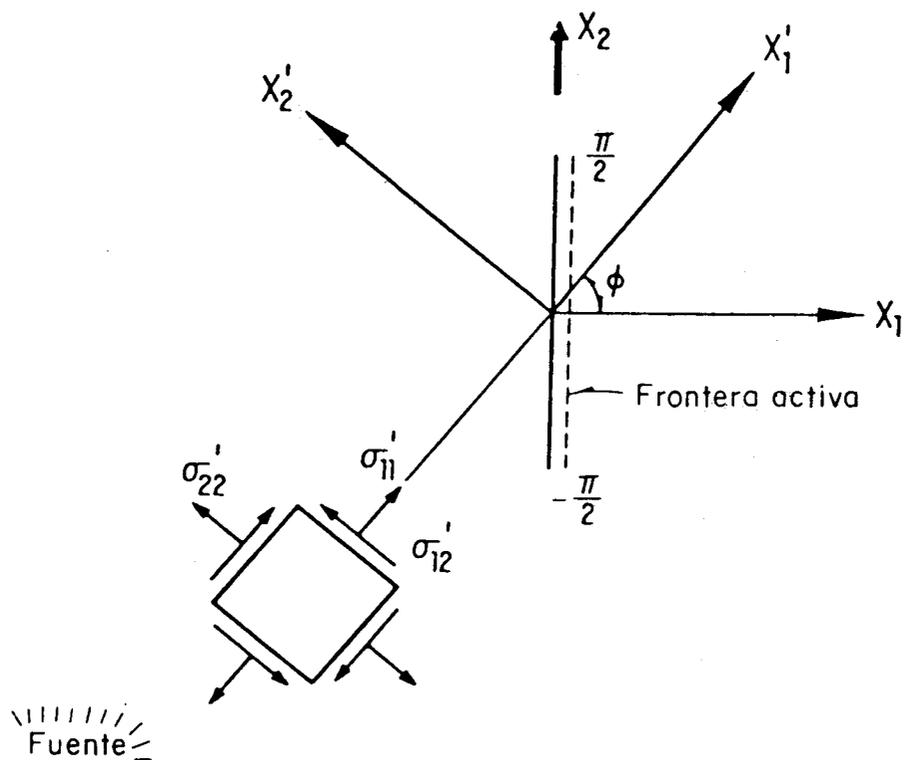


Fig 2. Frente de ondas planas incidiendo en una frontera activa

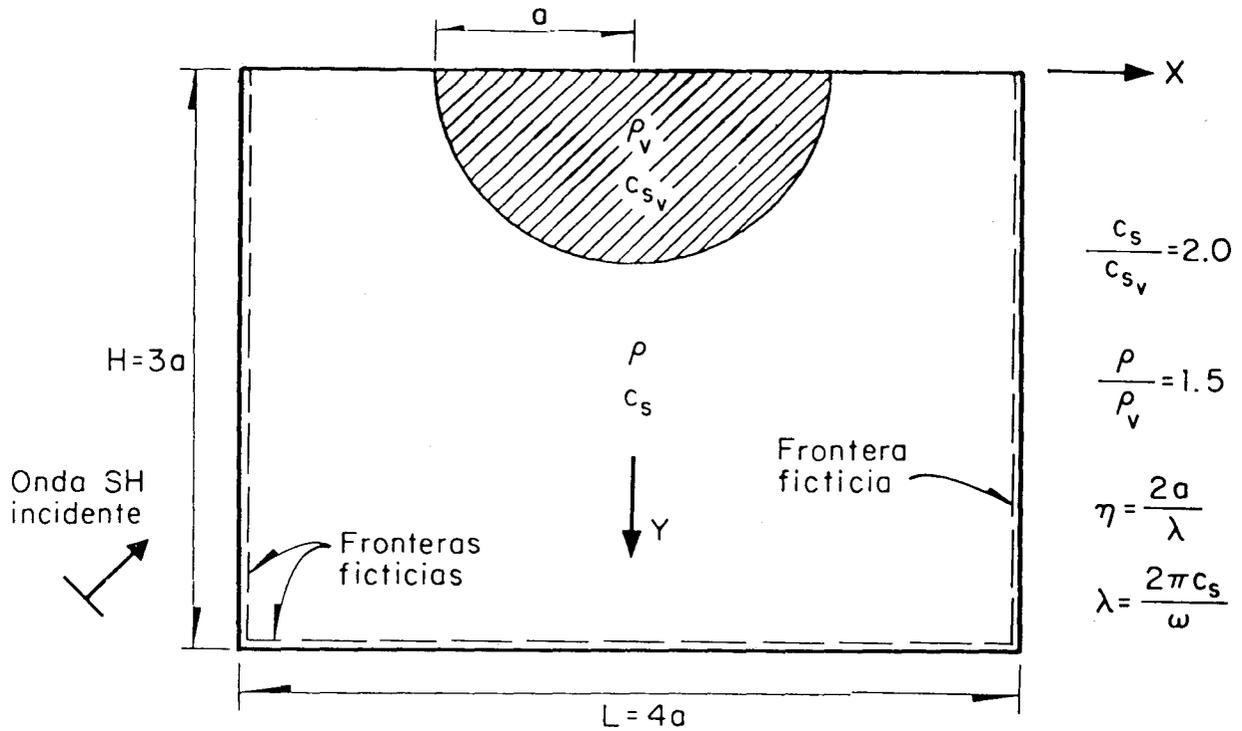


Fig 3. Valle semicilíndrico contenido en un semiespacio

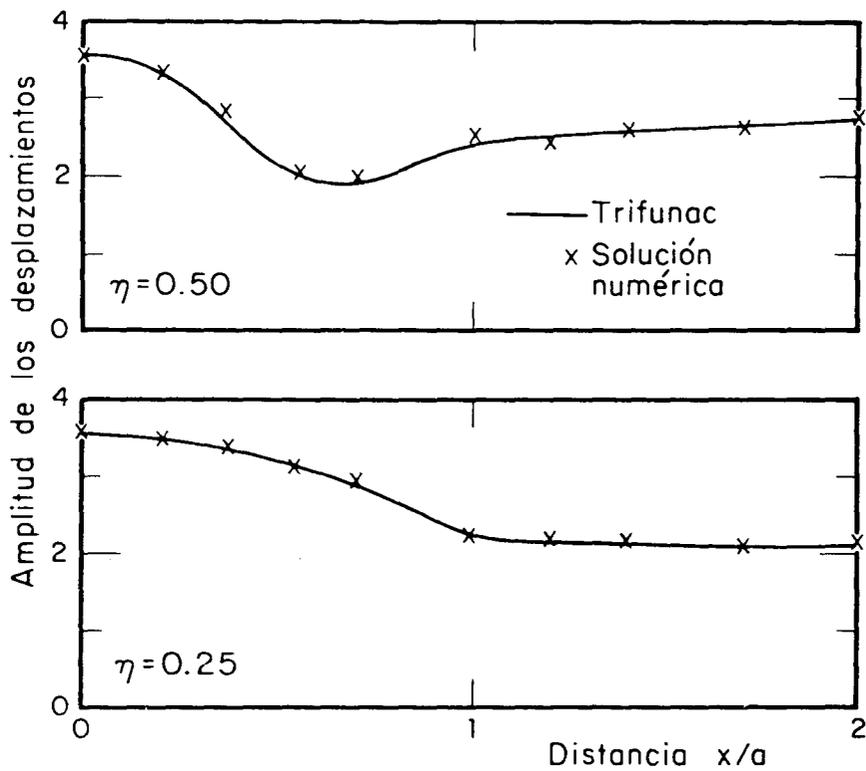


Fig 4. Desplazamientos en la superficie para ondas SH que inciden verticalmente