

EFFECTOS DEL COMPONENTE SISMICO  
VERTICAL EN EDIFICIOS ALTOS.

Emilio Rosenblueth\*

*Introducción*

A veces somos demasiado conscientes de que las estructuras llamadas a resistir temblores se diseñan para que resistan la acción de la gravedad. Ello conduce a despreciar en diseño sísmico los efectos de la aceleración vertical del terreno, bajo la hipótesis de que el diseño por cargas gravitacionales asegura la resistencia a este componente sísmico. La falta de experiencia con el comportamiento de edificios altos y estructuras de grandes claros en zonas próximas a los epifocos de macrosismos ha hecho que solo muy recientemente comience a acumularse evidencia de que el componente vertical puede ser importante en condiciones prácticas.

Vale citar las experiencias de Acapulco<sup>1</sup>, 1962, así como durante otros sismos de los últimos años; San Salvador<sup>2</sup>, 1965, y San Fernando<sup>3</sup>, 1971. A raíz de la mayoría de los temblores más intensos de Acapulco se han recogido informes de testigos oculares en cuanto a que algunas vigas habían golpeado contra elementos no estructurales situados arriba de ellas y en un caso el golpeteo dejó huellas visibles. Ello indica la aparición de aceleraciones verticales, una vez amplificadas por el comportamiento dinámico de la estructura, mayores que la aceleración de la gravedad. Además se detectaron algunas fallas de compresión y grietas horizontales en columnas que parecen confirmar esta aseveración. Sin embargo, las fallas y grietas pudieron haberse debido a momentos de volteo o asentamientos diferenciales y sería difícil hoy dilucidar la causa principal. En el sismo de San Salvador ocurrieron algunas fallas locales que no es fácil explicar

sin admitir aceleraciones verticales del terreno mayores que 0.7g. Durante el temblor de San Fernando, California algunos instrumentos instalados en edificios de alturas moderadas y grandes (máximo 42 pisos) registraron aceleraciones verticales mayores que 0.2g en la base y que 0.4g en el extremo superior del inmueble (g = aceleración de la gravedad). Los instrumentos no estaban situados, seguramente, en los puntos que experimentaron las máximas aceleraciones en cada edificio y, por otra parte, ninguna de estas estructuras se halla en la zona que experimentó las sacudidas más violentas. Es de suponerse que este evento habría causado aceleraciones verticales más elevadas que las registradas si hubiera habido instrumentos estratégicamente situados en edificios ubicados más desfavorablemente.

Usando un registro de movimiento vertical del terreno en San Fernando, se han calculado las respuestas de un edificio de diez pisos con estructura constituida por marcos<sup>4</sup>. Se encuentra que la aceleración vertical del terreno trae consigo fuertes aumentos en la demanda de ductilidad en los miembros estructurales de los niveles superiores.

Admitiendo que ciertas estructuras deben analizarse ante el componente vertical del movimiento del terreno, estaría desproporcionado exigir tal análisis en todos los casos. Vale la pena analizar aquí edificios idealizados de manera sencilla para conocer el orden de magnitud de las respuestas y la influencia de algunos parámetros a fin de establecer criterios prácticos, así sean aproximados.

*Idealización de la estructura*

Por sencillez idealizaremos la estructura de los edificios altos primeramente como una barra de sección uniforme a la que están fijas láminas flexibles infinitamente próximas entre sí y de masa uniforme a lo alto del edificio (fig 1). La barra representa las columnas del edificio, y las láminas los sistemas de piso. Después consideraremos estructuras en que el área transversal de las columnas decrece gradualmente hacia arriba.

Para conocer el orden de magnitud de la rigidez de la barra notemos que en una estructura metálica las co-

\* Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM, México, D. F.

lumnas de los primeros entresijos están sujetas a un esfuerzo normal medio (despreciando momentos flexionantes) del orden de 1 ton/cm<sup>2</sup> ante la acción de la gravedad y que su módulo elástico es 2100 ton/cm<sup>2</sup>. Por tanto su unidad de longitud posee una rigidez del orden de 2100ghm, donde h y m son la altura y masa por unidad de altura del inmueble. Tratándose de columnas de concreto reforzado el esfuerzo normal medio (obtenido como la fuerza longitudinal entre el área transformada suponiendo concreto con resistencia a la compresión de 0.4 ton/cm<sup>2</sup>) es del orden de 0.08 ton/cm<sup>2</sup> y el módulo elástico de 320 ton/cm<sup>2</sup>. Por consiguiente la rigidez de un elemento de longitud unitaria es del orden del doble que para las columnas de acero. El periodo fundamental de un edificio con columnas metálicas y pisos infinitamente rígidos valdría  $T_1 = 4h(m/K)^{1/2}$ , donde K = rigidez de las columnas, es decir  $T_1 = 4(h/2100g)^{1/2}$ , estando h en centímetros. Con h = 3 m/piso los edificios de 10, 20, 50 y 100 pisos tendrían periodo fundamental de aproximadamente 0.15, 0.22, 0.34 y 0.48 seg respectivamente. Si su estructura es de concreto reforzado estos valores se reducen a 0.11, 0.15, 0.24 y 0.34 seg. Si el área transversal de las columnas disminuye hacia arriba, el periodo fundamental excede al calculado con base en las columnas de planta baja. El exceso es cercano a 20 por ciento cuando la variación en área es lineal entre el desplante y el extremo superior y el área mínima vale 20 por ciento de la máxima.

Las flechas de las vigas principales (trabes) ante carga gravitacional suelen limitarse a una fracción de su claro y lo mismo es cierto, directa o indirectamente, de las flechas de las losas o vigas secundarias. Dicha fracción depende del reglamento que se adopte pero difícilmente excede de 1/300 para cada viga o losa respecto a sus apoyos. Al centro de un tablero podrán presentarse valores del doble de este, es decir 1/150 del claro. En sistemas de piso de concreto reforzado se limitan las flechas a largo plazo, y éstas raras veces son menores que el doble de las flechas instantáneas. Es razonable, en resumen, suponer que en sistemas de piso metálicos o de concreto presforzado la flecha máxima bajo la acción estática de la gravedad puede alcanzar 1/150 del claro y que la correspondiente flecha ante cargas de corta duración en concreto reforzado no pasa de 1/300 del claro. Los claros usuales en las plantas tipo de la mayo

ría de los edificios altos están comprendidos entre 6 y 12 m. Para sistemas de piso metálicos hallaremos, pues, flechas estáticas menores que 1200/150 = 8 cm y en los de concreto reforzado, de 4 cm. Estudiaremos también edificios metálicos en que las flechas sean de 4 cm pues en principio cabría la posibilidad de simplificar los requisitos de diseño en edificios con sistemas de piso moderadamente rígidos.

Empleando un método energético puede calcularse de manera aproximada el periodo fundamental de vibración de un sistema de piso, apoyado en columnas que no admiten desplazamiento vertical. Se demuestra en el apéndice A que en condiciones representativas este periodo vale, en segundos,  $0.16 \sqrt{z_s}$ , en que  $z_s$  = flecha en centímetros. Dado que el periodo natural de un sistema con un grado de libertad vale  $0.20 \sqrt{z_s}$ , concluimos que los sistemas de piso cuya masa y rigidez por unidad de altura del edificio valen m y k, respectivamente, y cuyo periodo es  $2\pi(m/k)^{1/2}$ , equivalen a sistemas como el representado en la fig 2 con masa m y rigidez  $(0.16/0.20)^2 gm/z_s = 0.64 gm/z_s$  por unidad de altura. Notamos que para edificios con sistemas de pisos flexibles con columnas indeformables el periodo natural máximo de cada piso es del orden de 0.45 o 0.32 0.32seg según se trate de sistemas metálicos o de concreto reforzado, y que con flechas no mayores de 4 y 2 cm estos límites superiores se reducen respectivamente a 0.32 y 0.23seg.

El periodo fundamental teniendo en cuenta deformaciones de los pisos y de las columnas es sensiblemente igual a la raíz de la suma de los cuadrados de los periodos con columnas indeformables y con pisos infinitamente rígidos. En todos los casos de interés práctico el periodo fundamental cae en un intervalo en que las ordenadas espectrales de aceleración son considerablemente mayores que la máxima aceleración vertical del terreno.

#### *Modos naturales de vibración en edificios uniformes*

Idealizaremos aquí un edificio alto como una barra uniforme carente de masa, cuya rigidez en un tramo unitario vale K y a la cual están ligados elementos elásticos de rigidez k y masa m por unidad de altura. Sea  $z(x,t)$  el desplazamiento de un punto de la barra situado a la altura y sobre el terreno, en el instan-

te  $t$  y sea  $y(x,t)$  el desplazamiento relativo de una masa, situada a la misma altura, con respecto a un soporte, en el mismo instante. Al considerar las fuerzas elásticas que obran en un elemento de longitud  $dx$  (fig 3), el principio de D'Alembert<sup>5</sup> permite escribir

$$K \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + ky = 0 \quad (1)$$

$$m \frac{\partial^2 (y + z)}{\partial t^2} + ky = 0 \quad (2)$$

Las ecuaciones diferenciales han de resolverse suponiendo que  $y$  y  $z$  son funciones de  $x$  por una función armónica de  $t$  y que deben satisfacerse las condiciones de fronteras

$$z(0,t) = 0 \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_h = 0 \quad (4)$$

(La ec 4 proviene de la condición de que no se aplica ninguna fuerza al extremo superior del edificio.) El sistema de ecuaciones se resuelve en el apéndice B, donde se encuentra que la  $n$ -ésima frecuencia natural vale

$$\omega_n = \left( \frac{k/m}{1 + k/K\beta_n^2} \right)^{1/2} \quad (5)$$

donde

$$\beta_n = \frac{(2n - 1)\pi}{2h} \quad (6)$$

el  $n$ -ésimo modo natural es

$$z_n = \text{sen } \beta_n x \quad (7)$$

$$y_n = (K\beta_n^2/k) z_n \quad (8)$$

y el  $n$ -ésimo coeficiente de participación vale

$$\alpha_n = \frac{4/(2n - 1)\pi}{1 + K\beta_n^2/k} \quad (9)$$

De acuerdo con las estimaciones anteriores tomaremos como propios de estructuras metálicas con flechas hasta de 8 cm los valores mínimos  $(k/m)^{1/2} = 14 \text{ seg}^{-1}$ ,  $(K/m)^{1/2} = 1435 \text{ h}^{1/2} \approx 1400 \text{ h}^{1/2}$ . Con flechas hasta de 4 cm,  $(k/m)^{1/2} = 20 \text{ seg}^{-1}$ . En estructuras de concreto supondremos rigideces del doble de las de acero.

En la tabla 1 se consignan los primeros seis periodos naturales  $T_1$  de edificios de acero con diversos números de pisos  $N$ , flechas de 8 cm, sistemas flexibles de piso y  $h = 3 \text{ m/piso}$  de conformidad con los criterios anotados. Llama la atención la extrema proximidad entre estos periodos en cada edificio con pisos

flexibles; sería aun mayor de haber considerado reducción de  $K$  con la altura sobre el terreno.

#### Modos naturales de vibración con columnas de sección variable

En muchos casos se idealiza satisfactoriamente un edificio alto asignando a  $K$  una variación gradual con la altura mientras  $k$  y  $m$  se toman como constantes. En estas condiciones la ec 1 se convierte en

$$K \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} + ky = 0 \quad (10)$$

Las ecs 2-4 siguen siendo válidas,

$$y_n = \frac{z_n}{k/m\omega_n^2 - 1} \quad (11)$$

y  $\omega_n$  se obtiene al satisfacer las ecs 3 y 4.

La variación del área transversal de las columnas con la altura en los primeros niveles de un edificio constituido por plantas tipo es bastante más lenta que lo que daría de ser proporcional a  $h - x$ . Además el área es finita en el extremo superior. Tomaremos como representativa la variación

$$K = (1 - 0.8x^2/h^2)K_0 \quad (12)$$

donde  $K_0$  = rigidez a nivel de desplante (fig 4). En el extremo superior,  $K = 0.2K_0$ .

Si bien es posible resolver analíticamente este sistema de ecuaciones se prefirió hacerlo numéricamente. En la fig 5 se compara el modo fundamental de un edificio cuya rigidez de columnas varía según la ec 12 con el de uno con rigidez uniforme. Con pisos infinitamente rígidos el periodo fundamental es 13 por ciento mayor que si la rigidez fuera uniforme e igual a  $K_0$ . Con pisos flexibles las diferencias en periodos naturales de ambos tipos de edificios son bastante menores.

#### Espectros del componente vertical

Es sabido que la aceleración vertical máxima del terreno como fracción de la horizontal crece conforme nos acercamos al epifoco<sup>5</sup>. En las inmediaciones de este ambas aceleraciones son del mismo orden e incluso quizás la vertical sea superior.

Dada la tendencia a estratificación horizontal de roca y suelos, sobre todo en los valles en que se asientan las grandes ciudades, en el componente vertical predominan las ondas longitudinales mientras que en el horizontal lo hacen las de cortante. Los contenidos de frecuencias difieren por tanto en ambos componentes. Cabe estimar que los espectros para el componente vertical serán parecidos a los de un componente horizontal, con modificación en la escala de ordenadas espectrales y reducción a un 70 por ciento en la escala de periodos.

Atendiendo a estas consideraciones y a que cuanto mayores son la magnitud y la distancia focal de un temblor más largos son sus periodos dominantes<sup>5</sup> y a la luz de varios espectros disponibles del componente vertical<sup>3</sup>, se postula para amortiguamiento igual a 5 por ciento del crítico, el espectro que con trazo interrumpido muestra la fig 6. Si bien es pequeña la ductilidad asociada a los efectos estructurales de la aceleración vertical no parece exagerado suponer que el comportamiento de la estructura equivaldrá al desarrollo de un factor de ductilidad de 3. Con esta hipótesis se ha estimado la línea en la fig 6. (Probablemente sea admisible la hipótesis de factores de ductilidad apreciablemente mayores cuando la cedencia plástica de la estructura está obligada a ocurrir en las vigas, sobre todo si estas son de concreto reforzado, pues entonces podrá haber cedencia tanto hacia arriba como hacia abajo. En efecto, el suministro de cuantías adecuadas de refuerzo longitudinal puede dar como resultado curvas fuerza-deformación (descontada la gravedad) prácticamente simétricas. En sistemas de piso metálicos, en cambio, la cedencia es casi necesariamente solo hacia abajo por la acción de la gravedad y pueden acumularse los daños debidos a temblores sucesivos.

Llevaremos adelante el análisis con base en la línea de trazo lleno a reserva de que se realice un estudio de sismicidad en cuanto al componente vertical por lo menos con el detalle con que para los componentes horizontales contienen la ref 7 y el estudio que actualmente está en marcha en el Instituto de Ingeniería para mejorar esas cartas sísmicas.

#### Cálculo de respuestas

Cuando las frecuencias de los modos naturales que contribuyen significativamente a una respuesta estructural difieren apreciablemente entre sí, pueden combinarse las correspondientes respuestas modales como la raíz de la suma de sus cuadrados<sup>5</sup>. Cuando no se cumple esta restricción -- y evidentemente en el caso que nos concierne no se satisface ni remotamente -- es necesario acudir a una expresión que contiene los dobles productos de las respuestas modales afectados de ciertos coeficientes<sup>5</sup>, expresión que puede ponerse en la forma

$$Q = \left( \sum_{ij} \frac{Q_i Q_j}{1 + \varepsilon_{ij}} \right)^{1/2} \quad (13)$$

donde

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\omega_i^2 - \omega_j^2}{\zeta_i^2 \omega_i^2 + \zeta_j^2 \omega_j^2} \quad (14)$$

$$\omega_i^2 = \omega_i^2 (1 - \zeta_i^2)^{1/2} \quad (15)$$

$\omega_i^2$  =  $i$ ésima frecuencia circular natural amortiguada

$$\zeta_i^2 = \zeta_i + \frac{2}{\omega_i s} \quad (16)$$

$\zeta_i$  = grado de amortiguamiento del  $i$ ésimo modo natural  
 $s$  = duración de un segmento de proceso gaussiano estacionario equivalente a la familia de temblores de interés.

Las respuestas modales  $Q_i$  deben tomarse con el signo de su coeficiente de participación. Adoptaremos  $\zeta_i = 0.05$  y  $s = 20$  seg. Nótese que si las frecuencias naturales están bien diferenciadas y  $\zeta_i^2$  es pequeño,  $\varepsilon_{ij} \ll 1$  cuando  $i \neq j$  pero  $\varepsilon_{ij} = 0$  en todos los casos, así que la ec 13 equivale sensiblemente a la raíz de suma de cuadrados. Si en cambio todas las frecuencias naturales fuesen iguales entre sí tendríamos  $\varepsilon_{ij} = 0$  y la ec 13 equivaldría a  $Q = \sum_i Q_i$ .

Empleando la ec 13 y los resultados de los cálculos anotados anteriormente, se han obtenido las distribuciones de aceleraciones máximas en los pisos y las fuerzas axiales por sismo en las columnas que muestran las figs 7-10. Las curvas que representan aceleraciones máximas en los pisos se han ajustado en el tramo inferior de cada edificio, en una longitud del

orden de un décimo de la altura del inmueble, para hacer coincidir la aceleración en la base de la estructura con la aceleración máxima del terreno. Las discrepancias que en este concepto arrojó el cálculo realizado son atribuibles a la discretación de la estructura y posiblemente al criterio empleado para la combinación de respuestas modales. Dicho criterio ha sido calibrado, y se lo ha hallado satisfactorio, en temas con dos grados de libertad<sup>6</sup> pero se desconoce la bondad de la aproximación que suministra en sistemas con número elevado de modos naturales significativos. A alturas mayores de los inmuebles no es de esperarse que introduzca errores importantes en vista de la preponderancia de los primeros modos naturales de vibraciones especialmente el fundamental.

Para el espectro supuesto, reducido por ductilidad, las aceleraciones verticales de diseño aumentan moderadamente, en términos generales, con la altura sobre el terreno, especialmente cuando las rigideces de los pisos no son pequeñas y cuando las de las columnas disminuyen con esa coordenada. Se alcanzan las aceleraciones máximas en edificios de altura intermedia. Las fuerzas axiales en columnas son muy ligeramente menores que la integral de las fuerzas en los pisos evaluada desde la azotea hacia abajo y, en general, exceden solo en unas decenas por ciento a la masa del edificio por la aceleración máxima del terreno.

La variación de aceleraciones con la altura sobre el terreno es bastante menos pronunciada que la que manifiestan la mayoría de los registros disponibles.<sup>3</sup> Ello ha de atribuirse a que los edificios reales en cuestión con seguridad no excursionaron apreciablemente en el dominio plástico. Si hubiésemos llevado a cabo los análisis del presente artículo empleando el espectro de comportamiento lineal en vez del reducido por comportamiento inelástico, habríamos encontrado también una fuerte amplificación con la altura sobre el terreno.

La forma de realizar el análisis implica que vigas y columnas cederán plásticamente por igual, y esta hipótesis es debatible. Si se sobrediseñan las columnas, las vigas tendrán que desarrollar ductilidades bastante mayores que las supuestas, sobre todo en las plantas superiores, y esto probablemente se logre en la práctica con tan sólo tomar precauciones menores en

su diseño; pero la situación inversa no es válida ya que la falla de columnas en compresión no suele desarrollar grandes ductilidades, especialmente en columnas de concreto reforzado provistas de estribos y en toda ocasión en que puede ocurrir pandeo inelástico. Se concluye la conveniencia de adoptar criterios más conservadores para el diseño de columnas ante carga axial que para el diseño de todos los miembros estructurales, incluyendo las columnas, en flexión.

Si bien los resultados que consigna el presente artículo no manifiestan la aparición de aceleraciones verticales sísmicas en la estructura mayores que la gravedad, sí dejan poca duda respecto a que aceleraciones elevadas se podrán presentar cuando la estructura sea incapaz de desarrollar ductilidades importantes. De aquí que en toda viga de concreto reforzado o presforzado deba suministrarse suficiente refuerzo longitudinal, en el lecho opuesto al que indica en cada sección la aceleración de la gravedad, para asegurar capacidad y ductilidad adecuadas. Las cuantías requeridas son pequeñas pues el concreto reforzado desarrolla gran ductilidad cuando cede por tensión en flexión y está subreforzado, pero deben ser suficientemente grandes como para que la capacidad sea mayor que la del concreto simple (que fallaría frágilmente) y para distribuir las grietas por flexión. Con estos fines son adecuadas las cuantías mínimas que suelen fijar los reglamentos de construcción para el acero en la cara de tensión.

Por las mismas razones ha de preverse la aparición de tensiones axiales pequeñas en las columnas. Ello se reflejará en el diseño de conexiones de columnas metálicas, en la elección de dispositivos de traslape para el acero longitudinal de las de concreto y en reducciones de la capacidad de estas para resistir fuerzas cortantes.

El espectro elástico que adoptamos en el presente análisis se basa en una interpretación somera de datos parciales sobre los efectos de un solo temblor. Sin duda en la práctica ocurrirán sismos cuyos contenidos de frecuencias difieran apreciablemente del que supusimos. Aunando a esta consideración la incertidumbre en periodos naturales de vibración y de manera destacada la que proviene de posible interacción suelo-estructura, se vuelve palpable que sería prematuro

adoptar criterios de diseño en los que la aceleración vertical variara sensiblemente como indican los presenten análisis en función de la altura sobre el terreno y de los demás parámetros pertinentes. Es claro, por otra parte, que si se adoptan criterios sencillos y aproximados no cabe hacer distinciones en función del material constitutivo de la altura, rigideces de los pisos y altura del inmueble.

Una manera sencilla de cubrir los resultados obtenidos y su extrapolación a condiciones probables excluidas del análisis consiste en especificar que, en zonas donde sea alta la probabilidad de que durante un lapso de varios decenios ocurran temblores intensos con epifoco cercano al sitio de la construcción, se incremente el factor de carga que se aplique a las acciones gravitacionales al analizar su efecto combinado con el de temblores. Un incremento de 20 por ciento en dicho factor, por encima de lo que sería adecuado de no obrar aceleraciones verticales, cubriría una aceleración máxima de 0.44g sin requerir de ductilidad mayores que las supuestas en estos análisis. La aseveración se basa en que el mínimo cociente usual de cargas viva a muerta en vigas es del orden de 1/3; si la carga viva durante un sismo intenso no excede de 1/3 del valor de diseño para carga gravitacional, las vigas podrán tomar una aceleración vertical de  $1.2 \times 1.33/1.11 - 1 = 0.44$  de la aceleración de la gravedad. En las columnas esta reserva se ve disminuida porque la carga viva que se toma para su diseño ya se halla reducida pero debe tenerse en cuenta que los efectos más desfavorables de las aceleraciones verticales en estos miembros consisten en aumentos de la demanda de ductilidad ante la combinación de dichas acciones y los momentos de volteo. Donde dominan las fuerzas axiales provocadas por estos momentos la combinación de ambos fenómenos puede aproximarse tomando íntegro el efecto de momentos de volteo y 0.3 de los de aceleraciones verticales<sup>8</sup>. Así, si los efectos de fuerzas gravitacionales son del mismo orden que los de temblor, un aumento de 20 por ciento en el factor de carga de los primeros permite resistir aceleraciones sísmicas hasta de 0.56g. Como una aceleración máxima de 0.44g en las vigas significa una aceleración media menor que esta cantidad cualquiera que sea el tramo vertical que se considere del edificio y las fuerzas verticales inducidas en las columnas son poco menores que la integral de las que

obran en las vigas, el criterio es conservador para las columnas, como era deseable.

Dado que las aceleraciones verticales del terreno pueden no solo aumentar sino también disminuir desfavorablemente las cargas gravitacionales (por ejemplo en miembros estructurales verticales en que la combinación de estas y de los efectos de momentos de volteo introduzca tensiones o disminuya la capacidad para resistir fuerza cortante, capacidad que en un amplio intervalo de interés práctico crece con la compresión axial), procederá también revisar la estabilidad ante la combinación de fuerzas gravitacionales y laterales reduciendo el factor de carga de las primeras multiplicándolo, digamos, por 0.8.

Un criterio sencillo, poco más refinado que el que antecede, haría variar el factor de carga con la altura sobre el terreno, pero difícilmente se justificaría en la presente etapa.

#### *Conclusiones*

Los análisis realizados señalan la aparición de aceleraciones verticales, en los pisos de edificios altos, que son en términos generales funciones moderadamente crecientes de la altura sobre el terreno. La amplificación dinámica que se encuentra es baja en relación con los registros obtenidos durante sismos en prototipos debido a la ductilidad que se ha supuesto que se desarrolla. Dicha amplificación es más pronunciada cuanto más rígidos son los pisos en comparación con las columnas y cuanto más rápidamente decrece la rigidez de estas con la altura.

Son máximas las aceleraciones en edificios de altura intermedia (20 a 50 pisos), y resultan poco mayores en estructuras de concreto que en las metálicas.

Para asegurar el desarrollo de ductilidades adecuadas, las columnas han de diseñarse más conservadoramente ante carga axial que las columnas y las vigas en flexión. Además, en zonas donde sea probable que ocurran temblores intensos de epifoco cercano debe preverse la inversión de momentos flexionantes en los sistemas de piso. Para ello bastará, en miembros de concreto reforzado, con suministrar, en la cara que ordinariamente sería de compresión, el refuerzo longitudinal mínimo

de tensión que marcan los reglamentos. Esta precaución es especialmente de atenderse en vigas de concreto presforzado. Además deberá preverse la aparición de pequeñas tensiones en las columnas.

Teniendo en cuenta las incertidumbres actuales sobre las formas de los espectros del movimiento vertical del terreno y en lo que atañe a interacción suelo-estructura, no se justifica generalmente un criterio refinado de diseño para cubrir los efectos de este componente sísmico. En zonas como las mencionadas bastará con especificar que los factores de carga usuales para fuerzas gravitacionales, cuando actúan simultáneamente con las fuerzas sísmicas, se incrementen y disminuyan ligeramente. La mayor parte de los efectos en cuestión quedarán cubiertos con factores del orden de 1.2 y 0.8 en las fuerzas gravitacionales.

Como alternativa cabe llevar a cabo análisis dinámicos refinados de los efectos de la aceleración vertical del terreno. En ellos deberán reconocerse las incertidumbres que se han mencionado.

Los análisis hechos mejorarían en precisión y alcance si abarcaran un mayor rango de condiciones y si tuviesen en cuenta las deformaciones locales del terreno cuando estas fuesen importantes.

Los espectros supuestos en este trabajo son representativos de lo que cabe esperar en la vecindad del epicentro de temblores intensos en terreno firme. Para establecer criterios dignos de confianza se requerirá el cálculo de los espectros con base en estudios de sismicidad. Aun en el estado actual cabe decir que para fines reglamentarios pueden eximirse de análisis por componente sísmico vertical los edificios que se hallan en vastas zonas donde la probabilidad de que ocurra un temblor intenso de epicentro cercano es sumamente pequeña.

Merecerá asimismo atención más profunda que la que le hemos dedicado el efecto del comportamiento no lineal de la estructura.

En la ref 9 el lector hallará un tratamiento paralelo e independiente de los temas aquí cubiertos. Las recomendaciones de la ref 9 son más conservadoras que las enunciadas en los párrafos precedentes.

### Reconocimiento

El autor agradece a Alejandro Asfura sus interesantes discusiones, la revisión crítica del manuscrito y la realización de los cálculos numéricos.

La producción de este artículo ha sido estimulada por el intercambio de ideas del autor con los grupos que tienen a su cargo la elaboración del Reglamento de Construcciones en el Distrito Federal y las disposiciones generales en Estados Unidos, estas bajo el patrocinio del Applied Technology Council de ese país.

### Apéndice A. Periodo fundamental de sistemas de pisos

Consideremos una viga prismática libremente apoyada. Sabemos que su frecuencia circular fundamental<sup>5</sup> es

$$\omega = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (A1)$$

donde L = claro, E = módulo elástico, I = momento de inercia de la sección transversal y  $\rho$  = masa por unidad de longitud. La flecha de la viga ante la acción estática de la gravedad vale

$$z_s = \frac{5g\rho L^4}{384EI} \quad (A2)$$

De aquí que su periodo fundamental  $2\pi/\omega$  sea  $(2/\omega) (384/5gz_s)^{1/2} = 2 (0.788z_s/g)^{1/2}$ , que ha de compararse con  $2 (z_s/g)^{1/2}$  para un sistema con un grado de libertad.

Consideremos ahora un sistema de piso constituido por vigas ortogonales continuas. Supondremos nulas sus rotaciones en los apoyos e iguales las flechas en ambas direcciones, con respecto a los correspondientes apoyos. Además supondremos que la deflexión a los cuartos del claro es igual a la mitad de la flecha. La configuración supuesta se exhibe en la fig A1. Por simetría, para estimación del periodo fundamental basta examinar un octavo de tablero, como se muestra en la fig A2 con las flechas y áreas tributarias que corresponden al apoyo, cuartos y centros de las vigas ortogonales.

La frecuencia fundamental puede aproximarse satisfactoriamente mediante el cociente de Schwartz<sup>5</sup>:

$$\omega^2 \approx \frac{\sum W_i z_i}{g \sum F_i z_i} \quad (A3)$$

donde  $W_i$  = peso de la  $i$ ésima masa supuesta concentrada, mediante cuyo conjunto se discretiza el sistema,  $z_i$  desplazamiento correspondiente y  $F_i$  = fuerza de inercia que obra en dicha masa. Aplicando esta expresión encontramos el periodo fundamental igual a  $2\pi (0.625z_s/g)^{1/2}$ , donde  $z_s$  = flecha al centro del tablero.

En un piso típico habrá generalmente un número dominante de tableros cuyas condiciones de apoyo y continuidad se aproximen a las del que acabamos de analizar y algunos tableros o voladizos cuyas condiciones de apoyo y continuidad estén más próximos a las de una viga libremente apoyada. Por tanto es razonable aproximar el periodo fundamental como  $2\pi(0.064z_s/g)^{1/2} = 0.2(0.64z_s)^{1/2} = 0.16/z_s$ , estando  $z_s$  en centímetros y el periodo en segundos.

#### Apéndice B. Modos naturales de estructuras uniformes

Deseamos resolver las ecs 1-4. Las ecuaciones diferenciales en cuestión son separables. Supongamos  $z(x,t)$   $z(x,t) = z(x)\theta(t)$ ,  $y(x,t) = Y(x)\theta(t)$ . La hipótesis es congruente con la condición de vibración libre en un modo natural. Sustituyendo en las ecs 1 y 2 obtenemos

$$KZ''\theta + KY\theta = 0 \quad (B1)$$

$$m(Y + Z)\ddot{\theta} + kY\theta = 0 \quad (B2)$$

donde las primas significan derivadas respecto a  $x$  y los puntos respecto a  $t$ . Estas expresiones deben satisfacerse para toda  $x$  y toda  $t$ . Por tanto podemos dividir ambos miembros de la ec B2 entre  $kY\ddot{\theta}$ :

$$\frac{m}{k}(1 + \frac{Z}{Y}) = -\frac{\ddot{\theta}}{\theta} \quad (B3)$$

El primer miembro no depende de  $x$  y el segundo no depende de  $t$ . Por tanto ambos son iguales a una constante, digamos  $\omega^{-2}$ . Nos quedan pues las ecuaciones

$$-\ddot{\theta} = \omega^2\theta \quad (B4)$$

$$Y = \frac{Z}{k/m\omega^2 - 1} \quad (B5)$$

Salvo por la amplitud (que es arbitraria) y un desfaseamiento (que es irrelevante) la solución de la ec B4 es

$$\theta = \text{sen } \omega t \quad (B6)$$

Por lo tanto  $\omega$  es la frecuencia natural del sistema

Sustituyendo la ec B5 en la B1 y dividiendo ambos entre  $\theta$  queda

$$KZ'' + \frac{kZ}{k/m\omega^2 - 1} = 0 \quad (B7)$$

cuya solución general es

$$Z = a \text{ sen } \left[ \left( \frac{k/K}{k/m\omega^2 - 1} \right)^{1/2} x \right] + b \text{ cos } \left[ \left( \frac{k/K}{k/m\omega^2 - 1} \right)^{1/2} x \right] \quad (B8)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes. De la ec 3,  $b = 0$ . Por la arbitrariedad de la amplitud podemos tomar  $a = 1$ . De la ec 4,

$$\left( \frac{k/K}{k/m\omega_n^2 - 1} \right)^{1/2} = \frac{(2n - 1)\pi}{2h} \quad (B9)$$

donde hemos introducido  $n = 1, 2, \dots$  para identificar la  $n$ ésima frecuencia natural.

De la ec B9 deducimos las 5 y 6. De las ecs B8 y B9 la 7 y de las ecs 5 y B5 la 8.

El coeficiente de participación<sup>5</sup> se calcula mediante la expresión

$$\alpha_n = \frac{\int_0^h m(y_n + z_n) dx}{\int_0^h m(y_n + z_n)^2 dx} \quad (B10)$$

Sustituyendo  $y_n$  y  $z_n$  de las ecs 7 y 8 obtenemos la 9

#### Notación

- A = aceleración espectral
- a = coeficiente en la expresión para los modos naturales
- b = coeficiente en la expresión para los modos naturales
- E = módulo de elasticidad
- F = fuerza de inercia
- g = aceleración de la gravedad
- h = altura de un edificio
- I = momento de inercia
- K = rigidez axial de un tramo unitario de columnas
- $K_0$  = valor de K en  $x = 0$
- k = rigidez de los sistemas de piso en un tramo de longitud unitaria de las columnas
- L = claro de una viga
- m = masa por unidad de altura de un edificio
- N = número de pisos
- Q = respuesta estructural de diseño
- s = duración de un proceso estacionario equivalente



- s = a la familia de temblores de diseño  
 T = periodo natural  
 t = tiempo  
 W = peso de un elemento que integra un sistema estructural  
 x = coordenada axial de un edificio  
 Y = función de x  
 y = desplazamiento relativo máximo entre un piso y las columnas que lo soportan  
 Z = función de x  
 z = desplazamiento de las columnas en cualquier punto de un edificio  
 $z_s$  = flecha al centro de un tablero antecarga gravitacional de corta duración  
 $\alpha$  = coeficiente de participación  
 $\beta$  = parámetro requerido para satisfacer la condición de frontera en el extremo superior de un edificio  
 $\zeta$  = grado de amortiguamiento  
 $\zeta'$  = grado equivalente de amortiguamiento  
 $\theta$  = función de t  
 $\rho$  = masa por unidad de longitud de una viga  
 $\omega$  = frecuencia circular

6. oct 1974; Ingeniería 43, 4 (oct-dic 1974), 375-96; Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe 343 oct 1974.
7. Esteva, L, "Consideraciones prácticas en la estimación bayesiana de riesgo sísmico", Instituto de Ingeniería, UNAM, Informe 248, 1970.
8. Rosenblueth, E, "Criterio aproximado de diseño ante sismos de varios componentes", presentado en Cuarto Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Oaxaca, Oax, nov 1975
9. Krawinkler, H, "Vertical ground motion in earthquakes -- its nature and its effects on the response of buildings", en A study of seismic risk for Nicaragua, parte 1, por H C Shah, C P Mortgat, A Kiremidjian y T C Zsutty, The John A Blume Earthquake Engineering Center, Dept of Civ Engng, Stanford University, 11, ene 1975, A6.1-32.

#### Referencias

1. Esteva, L, "Los temblores de mayo de 1962 en Acapulco", Rev Soc Mex de Ing. Sísm. 1, 2, dic 1963, 39-60. Informe 24 del Instituto de Ingeniería, UNAM.
2. Rosenblueth, E y Prince, J, "El temblor de San Salvador, 3 de mayo 1965: ingeniería sísmica", Rev Soc Mex de Ing. Sísm. 3, 2, dic 1965, 33-60; Ingeniería 35, 1, ene 1966, 31-58.
3. Trifunac, M D, Brady, A G y Hudson, D E, "Analysis of strong motion earthquake accelerograms", partes A, B, etc, vol 3: Response spectra, Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, Cal, 1973 y 1974
4. Anderson, J C y Bertero, V V, "Effects of gravity loads and vertical ground acceleration on the seismic response of multistory frames", Proc Fifth World Conf on Earthq Engng, Roma, 1973, 2, 2914-23
5. Newmark, N M y Rosenblueth, E, *Fundamentals of earthquake engineering*, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, N J, 1971.
6. Rascón, O A y Villarreal, A, "Estudio estadístico de los criterios para estimar la respuesta sísmica de sistemas lineales con dos grados de libertad", Memorias del Primer Congreso Venezolano de Sismología e Ingeniería Sísmica, Caracas, Venezuela.

Tabla 1. Periodos naturales de vibración ( $T_i$ , seg)

r	Pisos flexibles				Pisos infinitamente rígidos			
	N = 10	N = 20	N = 50	N = 100	N = 10	N = 20	N = 50	N = 100
1	0.4753	0.5004	0.5691	0.6681	0.1565	0.2213	0.3498	0.4947
2	0.4518	0.4548	0.4637	0.4782	0.0522	0.0738	0.1166	0.1650
3	0.4499	0.4510	0.4542	0.4596	0.0313	0.0443	0.0700	0.0990
4	0.4494	0.4499	0.4516	0.4543	0.0224	0.0316	0.0500	0.0707
5	0.4491	0.4495	0.4505	0.4522	0.0174	0.0246	0.0389	0.0550
6	0.4490	0.4492	0.4499	0.4510	0.0142	0.0201	0.0328	0.0450

$$(k/m)^{1/2} = 14 \text{ seg}^{-1}, \infty$$

$$(k/m)^{1/2} = 1400h^{-1}$$

$$h = 300 \text{N cm}$$

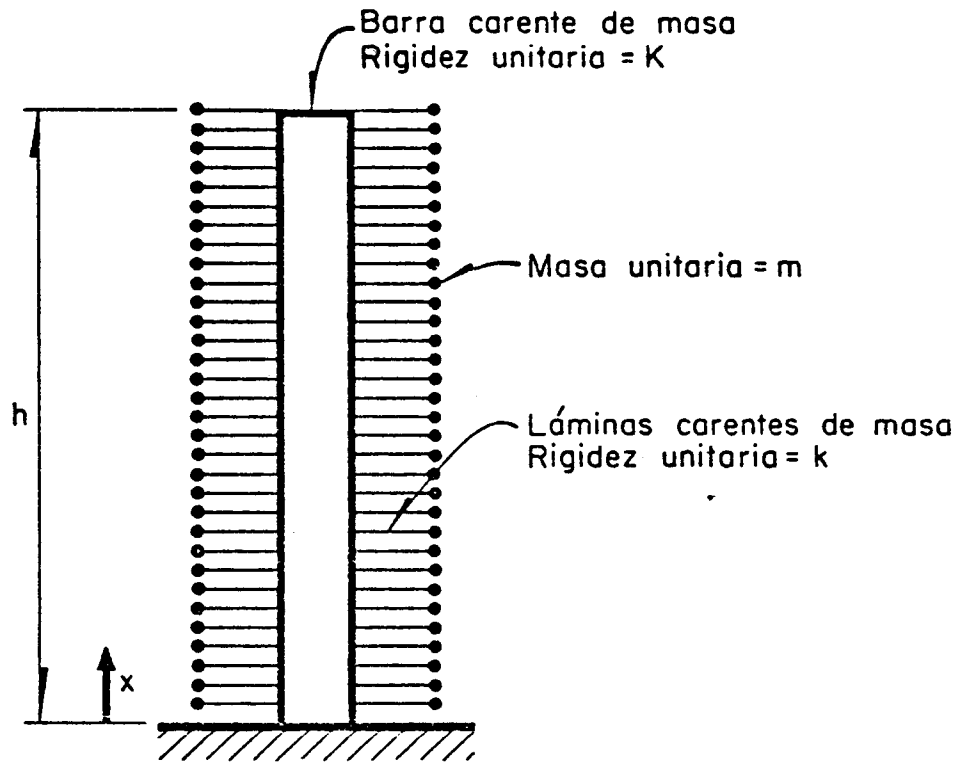


Fig 1. Edificio idealizado

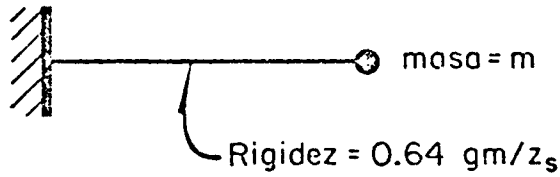


Fig 2. Sistema equivalente a pisos por unidad de altura

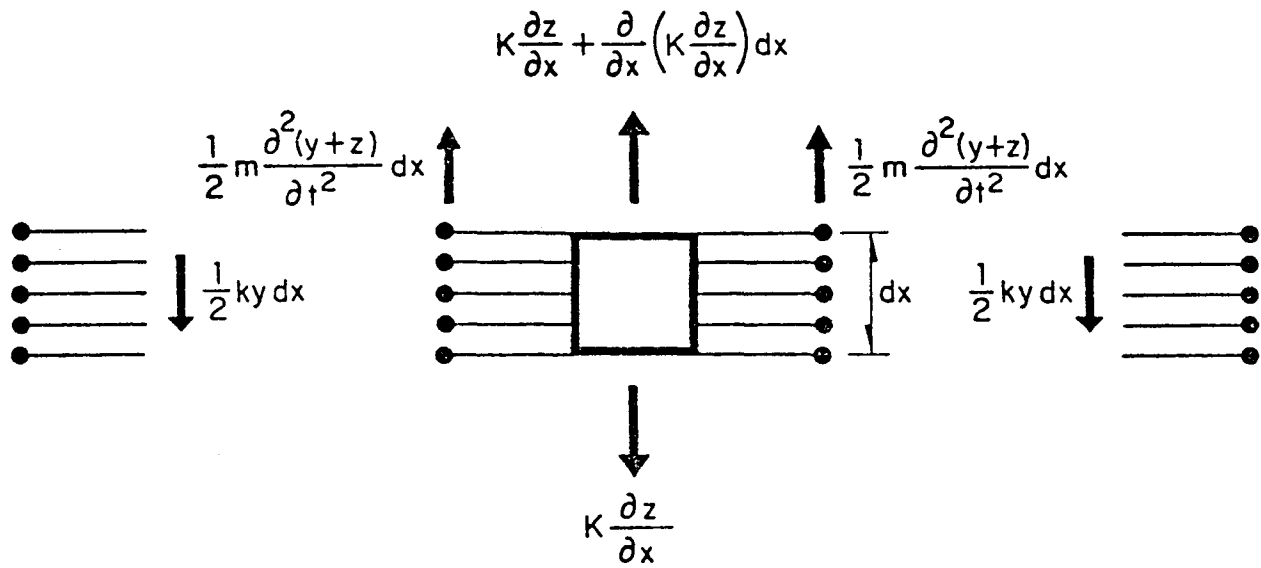


Fig 3. Fuerzas elásticas y de inercia en un elemento diferencial

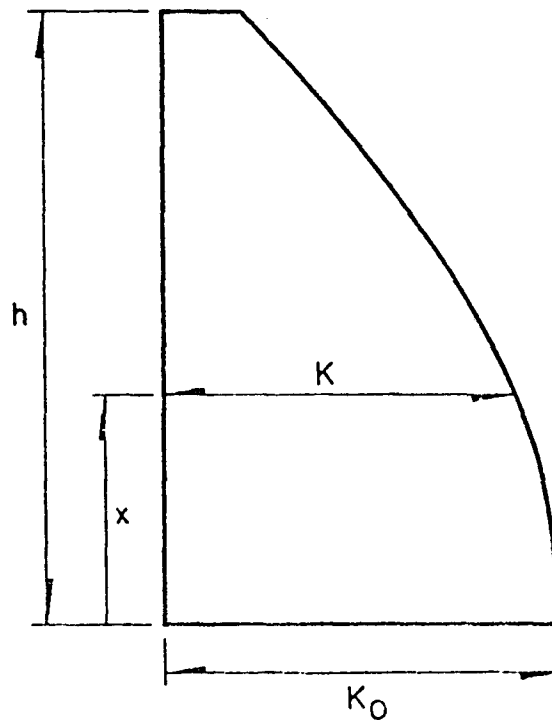


Fig 4. Variación de la rigidez de columnas

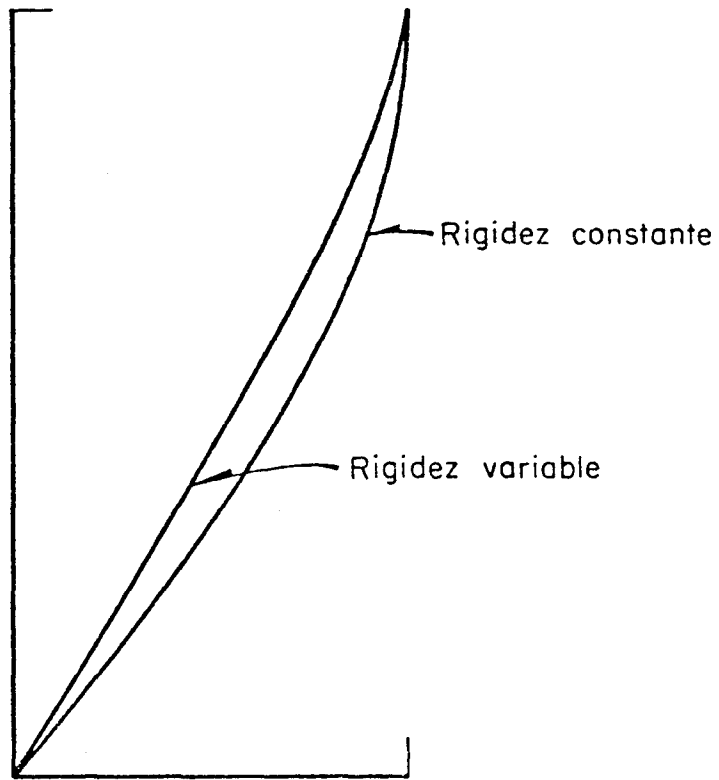


Fig 5. Comparación de modos fundamentales

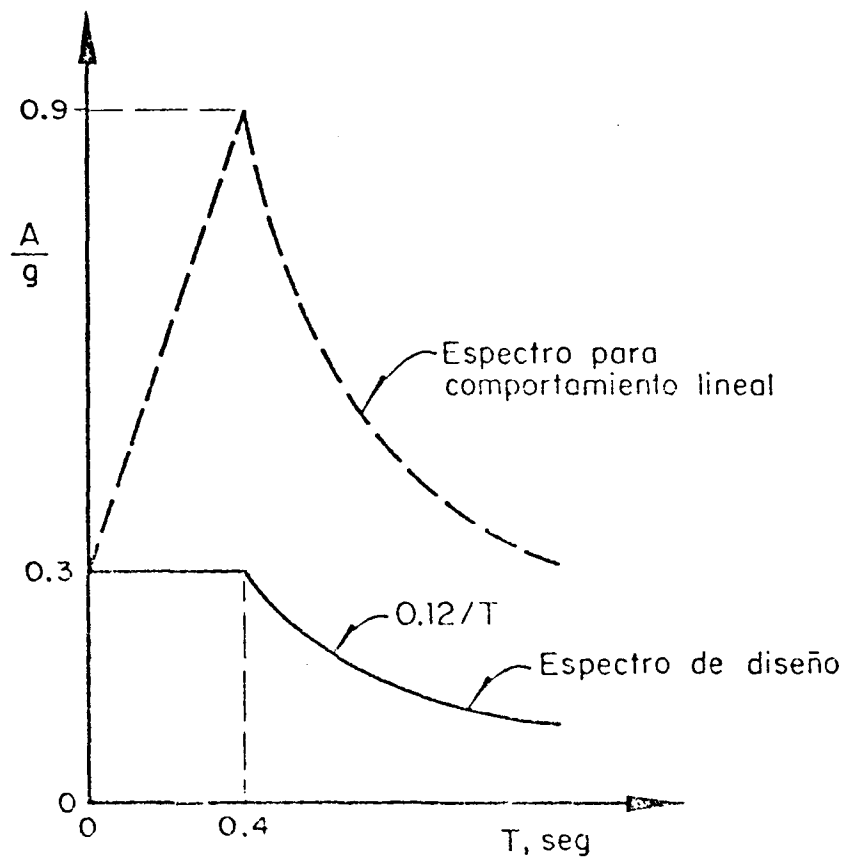


Fig 6. Espectros supuestos para movimiento vertical del terreno

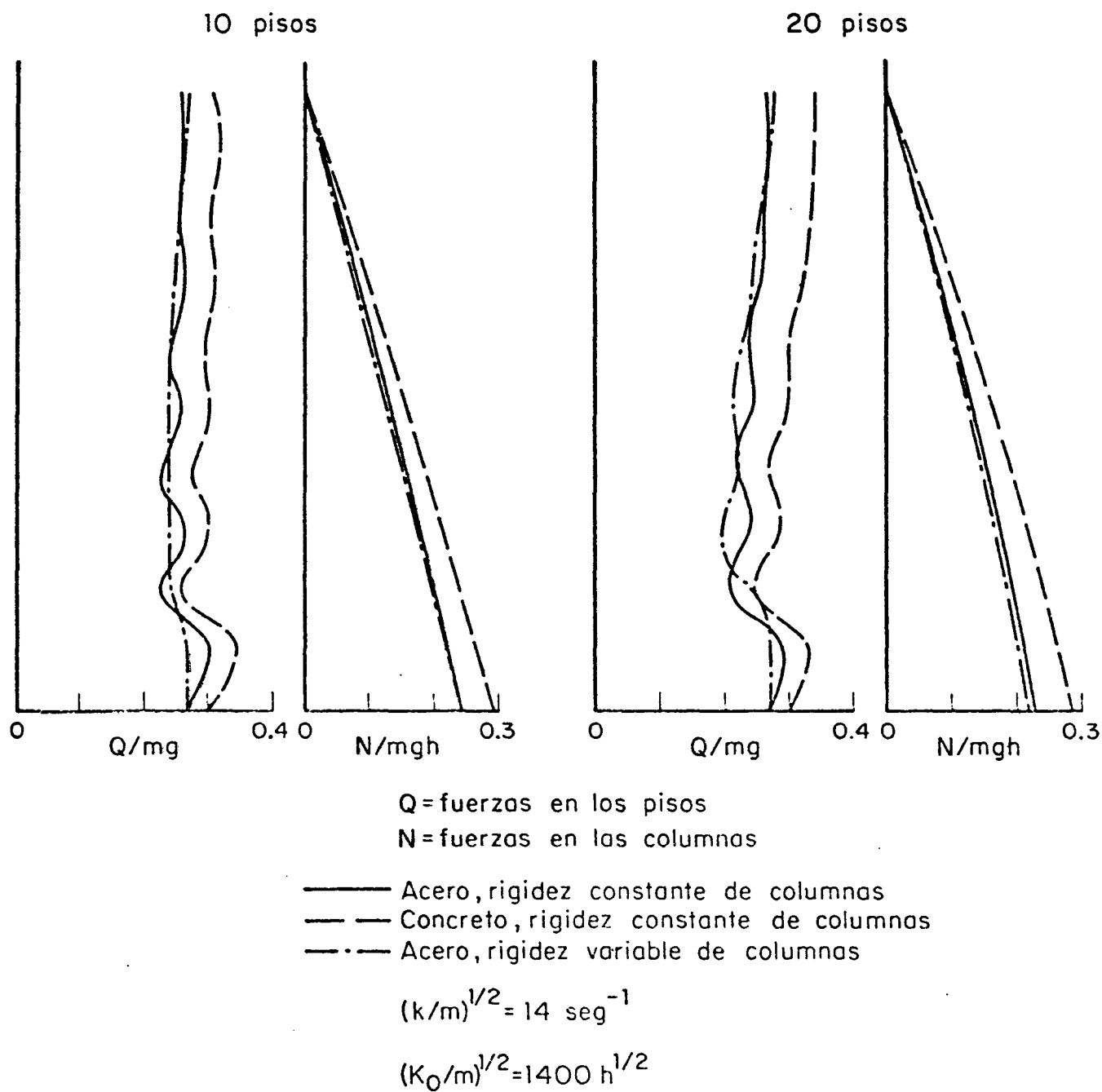
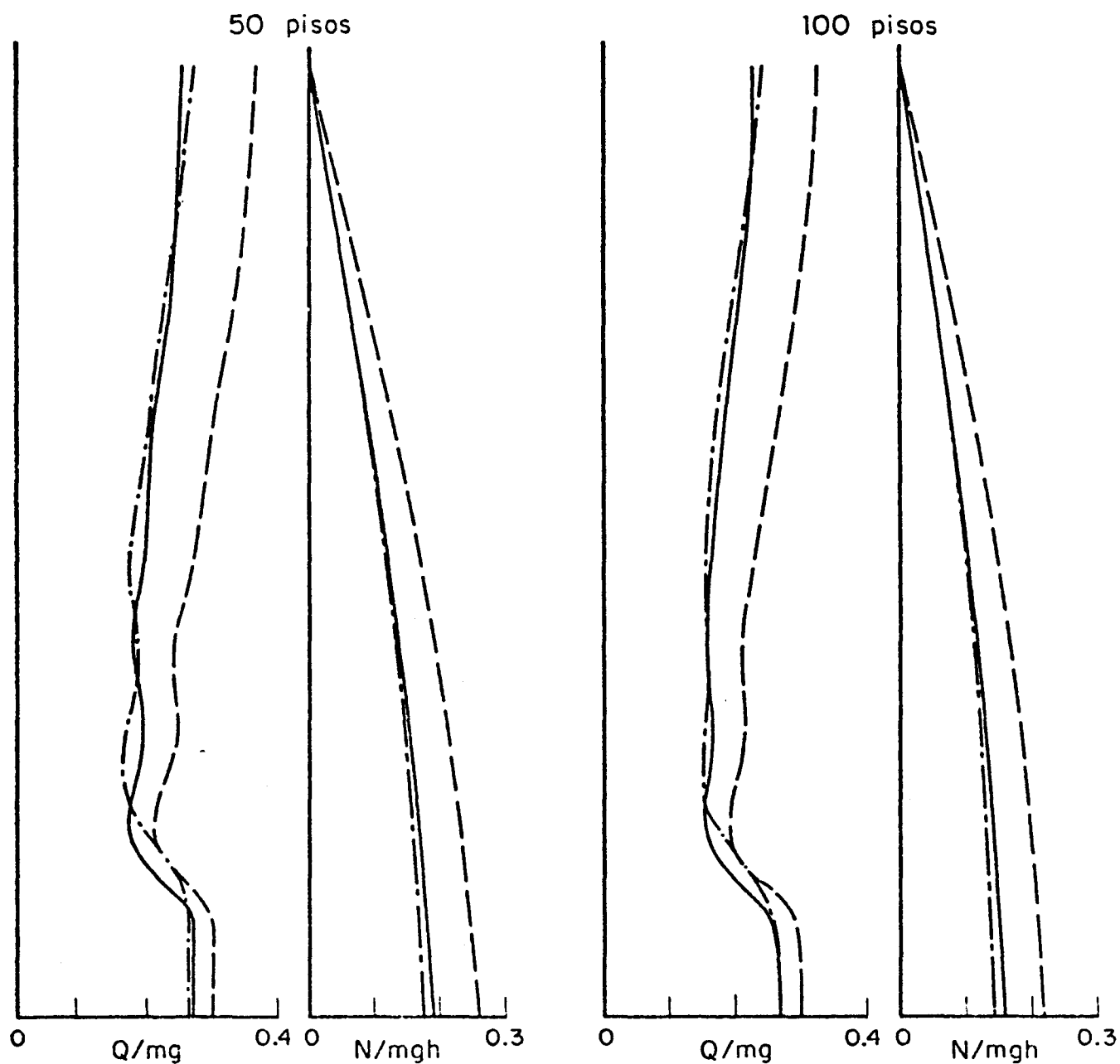


Fig 7. Fuerzas de diseño correspondientes al componente vertical, flecha estática en pisos = 8 cm, edificios de 10 y 20 pisos



Q = fuerzas en los pisos  
 N = fuerzas en las columnas

— Acero, rigidez constante de columnas  
 - - - Concreto, rigidez constante de columnas  
 - · - Acero, rigidez variable de columnas

$$(k/m)^{1/2} = 14 \text{ seg}^{-1}$$

$$(K_0/m)^{1/2} = 1400 \text{ h}^{1/2}$$

Fig 8. Fuerzas de diseño correspondientes al componente vertical, flecha estática en pisos = 8 cm, edificios de 50 y 100 pisos

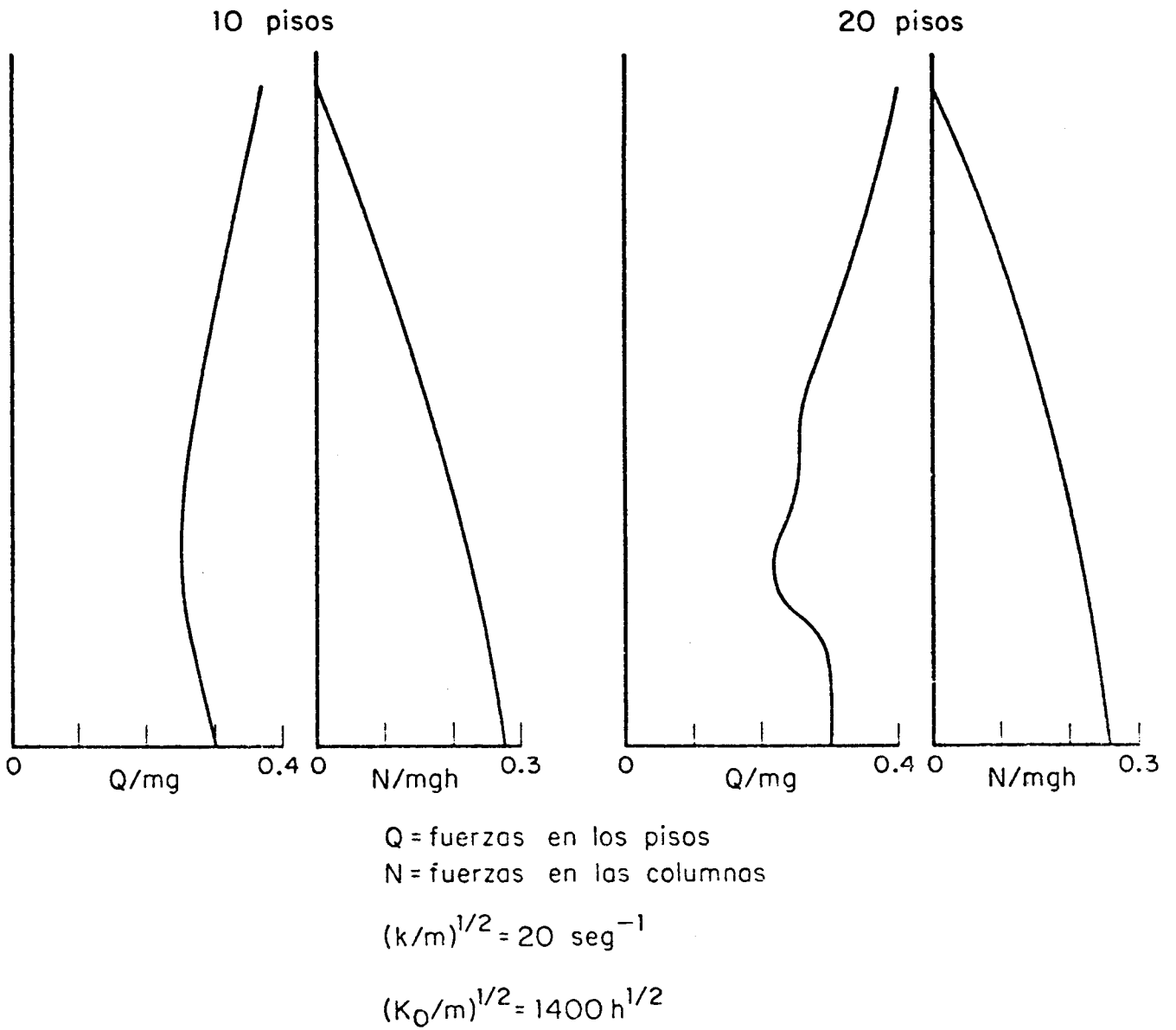
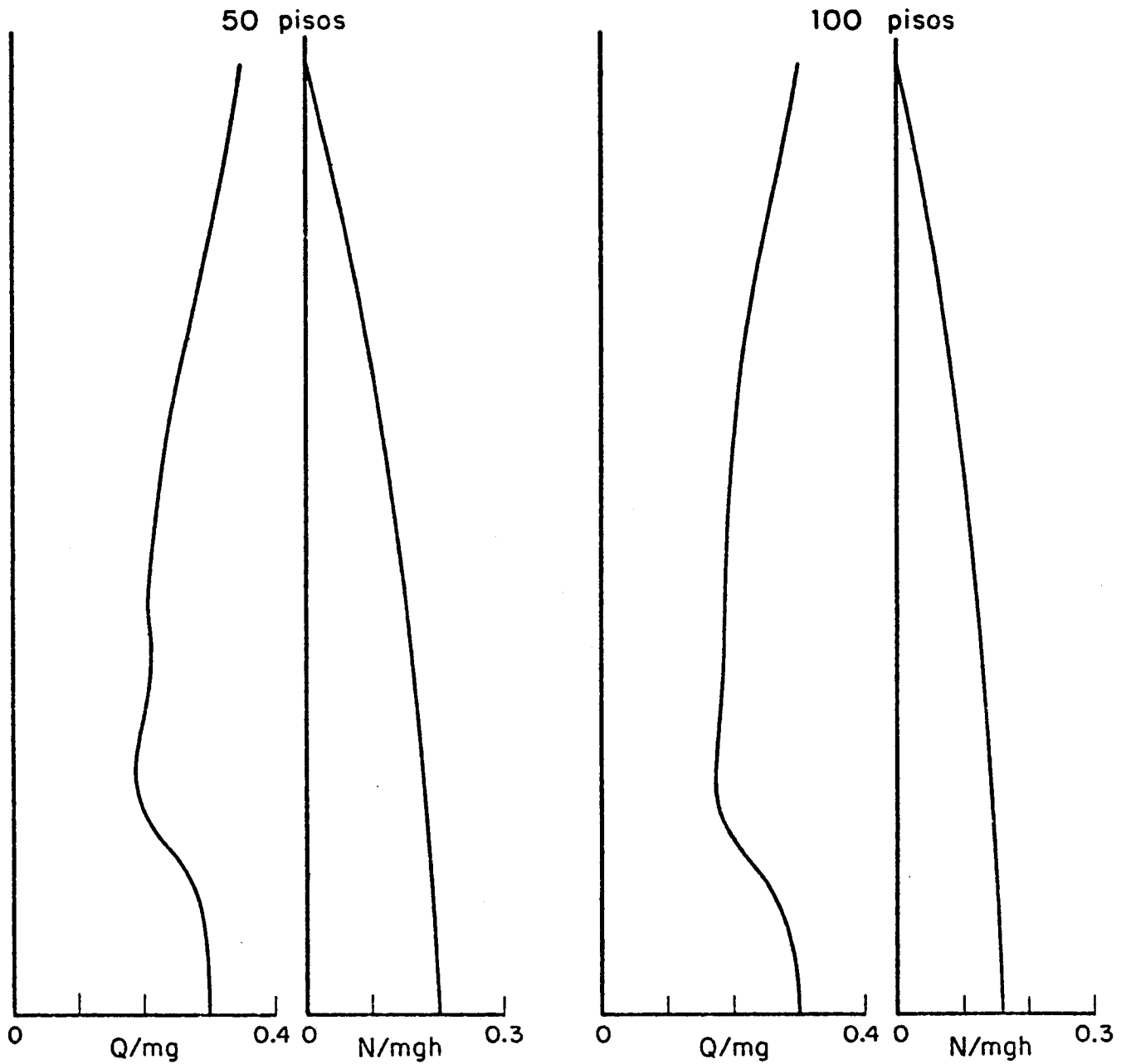


Fig 9 Fuerzas de diseño correspondientes al componente vertical, flecha estática en pisos = 4 cm, edificios de 10 y 20 pisos





Q = fuerzas en los pisos  
 N = fuerzas en las columnas

$$(k/m)^{1/2} = 20 \text{ seg}^{-1}$$

$$(K_0/m)^{1/2} = 1400 \text{ h}^{1/2}$$

Fig 10. Fuerzas de diseño correspondientes al componente vertical, flecha estática en pisos = 4 cm, edificios de 50 y 100 pisos

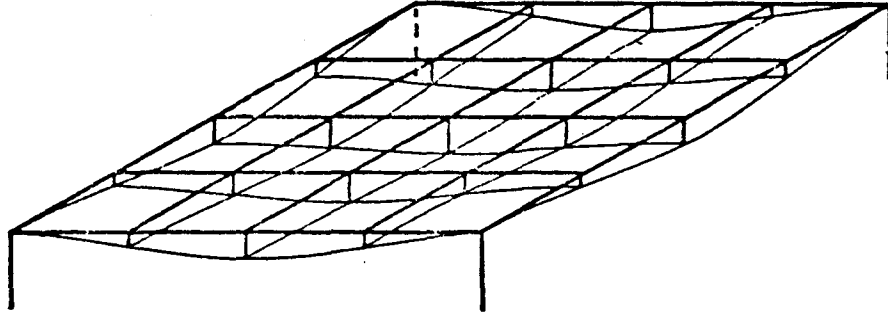


Fig A1. Tablero del sistema de piso

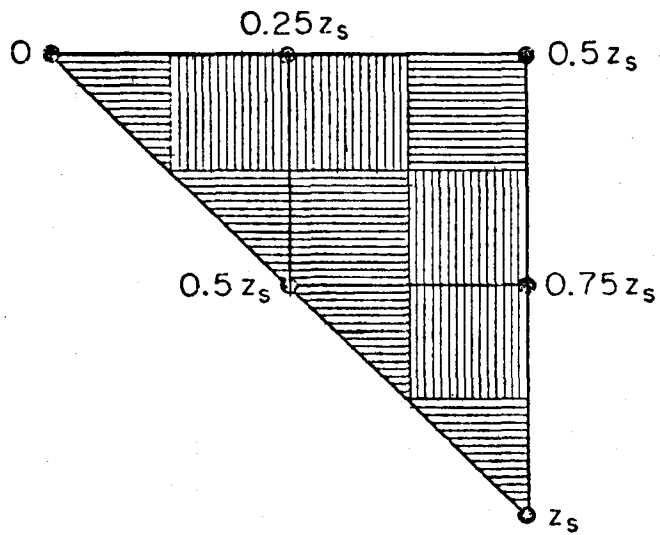


Fig A2. Flechas y áreas tributarias en un octavo de tablero