

ANÁLISIS PROBABILÍSTICO MULTIVARIADO DE PELIGRO SÍSMICO USANDO CÓPULAS

Darío Rivera-Vargas ⁽¹⁾ y *Ernesto Heredia-Zavoni* ⁽²⁾

RESUMEN

El análisis probabilístico multivariado de peligro sísmico permite estimar la tasa de excedencia de medidas de intensidad vectoriales del movimiento sísmico del suelo considerando su distribución de probabilidad conjunta. Dicho análisis se emplea en el análisis probabilista de demanda sísmica de estructuras cuya respuesta está correlacionada con un conjunto de medidas de intensidad. En tales casos, es conveniente calcular la tasa de excedencia de la respuesta utilizando la tasa de excedencia de medidas de intensidad vectoriales, a diferencia de un enfoque univariado donde las tasas de excedencia de un conjunto de medidas de intensidad son calculadas por separado sin tomar en cuenta la dependencia estadística entre ellas. En este trabajo se presenta una formulación multivariada para el análisis probabilístico de peligro sísmico de medidas de intensidad vectoriales usando cópulas. La formulación es de carácter genérico pues expresa la tasa de excedencia en términos de la cópula de una medida de intensidad vectorial, sin suponer para ésta una distribución de probabilidad conjunta en particular. La formulación se empleó en un ejemplo de estimación de la tasa de excedencia de la distorsión de entrepiso máxima de un edificio de acero de 20 niveles usando un modelo de regresión en función de las aceleraciones espectrales asociadas con los dos primeros modos de vibrar. El modelo de cópula de las aceleraciones espectrales se estimó usando datos de registros sísmicos de la zona de transición de la Ciudad de México. Este tipo de excitación genera una contribución importante de la respuesta asociada con el segundo modo de la estructura. La formulación multivariada produjo tasas de excedencia significativamente menores que los obtenidos con un análisis univariado usando la aceleración espectral para el modo fundamental de la estructura como medida de intensidad escalar.

Palabras clave: Análisis de demanda sísmica; tasa media de excedencia; distorsión de entrepiso máxima; aceleración espectral; medida de intensidad vectorial; τ de Kendall

MULTIVARIATE PROBABILISTIC ANALYSIS OF SEISMIC HAZARD USING COPULAS

ABSTRACT

Multivariate probabilistic analysis of seismic hazard allows estimating the exceedance rate of vector-valued intensity measures of ground motion considering their joint probability distribution. Such an analysis is used for probabilistic seismic demand analysis of structures whose response is correlated

Artículo recibido el 21 de abril de 2021 y aprobado para su publicación el 28 de junio de 2022. Se aceptarán comentarios y/o discusiones hasta cinco meses después de su publicación.

⁽¹⁾ División de Matemáticas e Ingeniería, FES Acatlán, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Alcanfores y San Juan Totoltepec, Santa Cruz Acatlán, Naucalpan, Estado de México, C. P. 53150. dario.arna@hotmail.com

⁽²⁾ Gerencia de Herramientas y Sistemas para Pozos e Instalaciones, Dirección de Investigación en Exploración y Producción, Instituto Mexicano del Petróleo, Eje Central Lázaro Cárdenas Norte 152, Ciudad de México, C.P: 07730. eheredia@imp.mx

with a set of intensity measures. In such cases, it is convenient to compute the exceedance rate of the response employing the exceedance rate of vector-valued intensity measures, in contrast to a univariate approach where the exceedance rates of a set of scalar intensity measures are calculated separately without accounting for their statistical dependence. In this work, a multivariate formulation is advanced for probabilistic seismic hazard analysis of vector-valued intensity measures using copulas. The formulation is generic considering that the exceedance rate is expressed in terms of the copula of a vector-valued intensity measure, without assuming a type of parametric model for its multivariate probability distribution. The proposed formulation is used in an example to assess the mean exceedance rate of the maximum interstory drift of a 20-story steel building employing a regression model in terms of the spectral accelerations for the first two structural periods. The copula model of the vector of spectral accelerations was estimated using ground motion records from stations on stratified sand and silt deposits in Mexico City. This type of seismic ground motion produces a significant contribution of the response associated with the second mode of the structure. The exceedance rates obtained from the multivariate formulation were significantly less than those from a univariate analysis using the spectral acceleration at the fundamental period of the structure as scalar intensity measure.

Keywords: Seismic demand analysis; mean rate of exceedance; maximum interstory drift; spectral acceleration, vector-valued intensity measure; Kendall's tau

INTRODUCCIÓN

El análisis probabilista de peligro sísmico es un procedimiento que permite evaluar la tasa media de excedencia de medidas de intensidad del movimiento sísmico del suelo. Es una herramienta ampliamente utilizada en la ingeniería sísmica y se ha aplicado en la elaboración de mapas de peligro sísmico asociados a un cierto periodo de retorno y en el cálculo de espectros de peligro uniforme. Esteva (1967) y Cornell (1968) concibieron originalmente el marco metodológico del análisis probabilista de peligro sísmico incorporando las incertidumbres asociadas con la magnitud y localización de las fuentes sísmicas, así como con los parámetros que caracterizan el movimiento del suelo en un sitio de interés. Empleando el teorema de la probabilidad total, desarrollaron una formulación univariada para calcular la probabilidad o la tasa media de excedencia de medidas de intensidad escalares tales como la aceleración máxima del suelo o la aceleración espectral. Dichas formulaciones se expresan en términos de la probabilidad condicional de excedencia de una medida de intensidad escalar dada una cierta magnitud y una localización de la fuente sísmica, y de la distribución de probabilidad marginal de éstas.

La tasa de excedencia de las medidas de intensidad del movimiento del suelo se emplea en el análisis probabilista de demanda sísmica, el cual tiene por objeto estimar la tasa de excedencia de la respuesta estructural (ver e.g. Shome, 1999; Moehle y Deierlein, 2004; Conte y Zhang, 2007; Barbosa, 2011). En el análisis probabilista de demanda sísmica se considera que una medida de intensidad eficiente es aquella que permite caracterizar con menor dispersión la respuesta estructural y, por lo tanto, estimar con mejor precisión la probabilidad de excedencia de la respuesta condicional a dicha medida de intensidad (Luco y Cornell, 2007). Se ha encontrado que el uso de una medida de intensidad escalar, como por ejemplo la aceleración espectral para el periodo fundamental, resulta ser un estimador ineficiente en ciertos casos (Bazzurro y Cornell, 2002; Baker y Cornell, 2005; Baker, 2007; Faggella *et al.*, 2013). Esto ocurre cuando la respuesta estructural está correlacionada significativamente con un conjunto de medidas de intensidad del movimiento sísmico, como puede ser el caso de edificios altos, puentes de gran longitud y plataformas marinas cuya respuesta no necesariamente está gobernada por el modo fundamental, o el de construcciones cercanas a una fuente sísmica y puentes cuya respuesta puede depender del movimiento sísmico del terreno en dos o tres direcciones ortogonales, además de los efectos de amplificación de sitio y de la duración de la

excitación, o de estructuras que exhiban una respuesta altamente no-lineal. La tasa de excedencia de la respuesta estructural debe ser calculada en tales casos utilizando tasas de excedencia de medidas de intensidad vectoriales. El análisis probabilístico multivariado de peligro sísmico provee el marco metodológico para la estimación de la tasa de excedencia de medidas de intensidad vectoriales considerando su distribución de probabilidad conjunta. A diferencia de un enfoque univariado, en el que las tasas de excedencia de un conjunto de medidas de intensidad, como por ejemplo las aceleraciones espectrales para distintos periodos estructurales, son calculadas por separado sin tomar en cuenta la dependencia estadística entre ellas, el cálculo de la tasa de excedencia de medidas de intensidad vectoriales toma en cuenta, mediante una formulación multivariada, su distribución de probabilidad conjunta.

Bazzurro (1998) propuso una metodología para el análisis multivariado de peligro sísmico. Esta metodología es una extensión del enfoque univariado y, aun cuando se puede generalizar a un cierto número de medidas de intensidad, fue ilustrada para el caso bivariado de dos aceleraciones espectrales. La densidad de probabilidad bivariada se expresa como el producto de la densidad marginal de una aceleración espectral y la densidad condicional de la segunda aceleración dada la primera. La metodología supone que la distribución conjunta de los logaritmos de las aceleraciones espectrales es de tipo normal o gaussiana, por lo que la densidad de probabilidad condicional y las marginales son desde luego de tipo log-normal. Esta suposición implica adicionalmente que la dependencia estadística entre los logaritmos de las aceleraciones espectrales puede ser caracterizada apropiadamente mediante el coeficiente de correlación lineal. Bajo esta perspectiva, algunos trabajos se han dedicado al análisis y modelado de la correlación lineal entre aceleraciones espectrales usando datos de registros sísmicos (Baker y Jayaram, 2008; Jayaram *et al.*, 2011). La metodología de Bazzurro (1998) fue empleada por Bazzurro y Cornell (2002) para evaluar la tasa de excedencia de la distorsión máxima de entrepiso de un modelo de edificio de acero de 20 niveles (Shome y Cornell, 1999; Gupta y Krawinkler, 1999). Los resultados obtenidos mostraron una reducción de la tasa de excedencia en comparación con la calculada mediante el enfoque univariado. Aplicando la formulación de Bazzurro (1998), Rajeev *et al.* (2008) evaluaron un procedimiento para seleccionar la combinación óptima de aceleraciones espectrales en el periodo del modo fundamental y en un modo superior de manera que se minimice la incertidumbre en la estimación de la tasa de excedencia aplicando una técnica de bootstrap a resultados de análisis de distorsión de columnas en un edificio de concreto reforzado. Con el fin de simplificar el análisis multivariado y de facilitar su aplicación en la práctica, se han propuesto formulaciones para evaluar de manera indirecta el peligro sísmico de medidas de intensidad vectoriales a través de la combinación de resultados de análisis univariados de medidas de intensidad escalares (Bazzurro *et al.* 2009; Koranghi *et al.*, 2016).

En este trabajo se presenta una formulación multivariada para el análisis probabilístico de peligro sísmico de medidas de intensidad vectoriales usando cópulas. La formulación se basa en la propuesta por Bazzurro (1998), sin embargo, a diferencia de aquella, la tasa de excedencia se expresa en forma genérica en términos de la cópula de una medida de intensidad vectorial, sin suponer un tipo de distribución de probabilidad multivariada en particular. Las cópulas son funciones que contienen la información sobre la estructura o patrón de dependencia estadística de las componentes de un vector aleatorio y definen su distribución de probabilidad conjunta (Nelsen, 2006). La ventaja es que, en lugar de suponer a priori una estructura de dependencia particular y estimar los parámetros que la caracterizan, por ejemplo, el coeficiente de correlación lineal en el caso gaussiano, este enfoque permite estimar la cópula que representa apropiadamente la estructura de dependencia del vector aleatorio y, en conjunto con las distribuciones marginales, definir el modelo de distribución multivariada. Las primeras aplicaciones de la teoría de cópulas se produjeron en disciplinas como las matemáticas financieras y la actuaría (Embrechts *et al.*, 2002). Posteriormente, se han aplicado también en la ingeniería civil para la caracterización multivariada de fenómenos naturales (Salvadori *et al.*, 2007), el cálculo de contornos de peligro ambiental para el diseño de estructuras marinas (Montes-Iturizaga y Heredia-Zavoni, 2015, 2016, 2017), el análisis de demanda sísmica

de múltiples parámetros de respuesta en edificios de concreto reforzado (Goda y Tesfamariam, 2015) y estudios de confiabilidad estructural (Tang *et al.*, 2013a, b).

El presente artículo inicia con una exposición de los conceptos básicos para el modelado multivariado empleando cópulas. Estos conceptos se utilizan luego para desarrollar la formulación multivariada del análisis probabilístico de peligro sísmico de medidas de intensidad vectoriales. La formulación se aplica a un ejemplo de análisis de la tasa de excedencia de la distorsión máxima de entrepiso usando el modelo de regresión de Bazzurro y Cornell (2002) para un edificio de acero de 20 niveles. En dicho análisis, se consideró una medida de intensidad vectorial compuesta por las aceleraciones espectrales para los dos primeros periodos modales de la estructura. Se presenta el procedimiento detallado de estimación de la cópula del vector de aceleraciones espectrales mediante estimadores basados en el τ de Kendall (Genest y Favre, 2007), el cual es una medida de asociación que permite caracterizar apropiadamente el patrón de dependencia entre variables aleatorias. Para la estimación de la cópula, se utilizaron datos de registros sísmicos de la zona de transición de la Ciudad de México. Este tipo de excitación genera una contribución importante de la respuesta asociada con el segundo modo de la estructura. Se describe enseguida el modelo de ley de atenuación utilizado para definir las distribuciones de probabilidad marginales de las aceleraciones espectrales. Se analizan los resultados del cálculo de la tasa de excedencia empleando la formulación multivariada y se examinan las diferencias con los resultados de un análisis univariado que sólo considera la aceleración espectral para el modo fundamental de la estructura. El trabajo concluye con unos comentarios finales y se apuntan algunos temas de interés para posibles trabajos futuros.

MODELADO MULTIVARIADO EMPLEANDO CÓPULAS

Las cópulas son funciones que definen rigurosamente la distribución de probabilidad conjunta o multivariada de un grupo de variables aleatorias $X = (X_1, \dots, X_n)$. Estas funciones permiten ensamblar la distribución conjunta $F_X(x_1, \dots, x_n)$ a partir de las distribuciones marginales $F_i(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, de cada una de las variables de la siguiente manera (Nelsen, 2006),

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = C(u_1, \dots, u_n) \quad (1)$$

donde, $C(u_1, \dots, u_n)$ es la cópula y $U_i = F_i(X_i)$ son variables uniformemente distribuidas en $[0,1]$. La ecuación 1 se conoce como el teorema de Sklar (1959). Dada la distribución multivariada, $F_X(x_1, \dots, x_n)$, se puede deducir entonces la siguiente expresión para la función de densidad de probabilidad conjunta,

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (2)$$

en la que $f_i(x_i)$ es la función de densidad de probabilidad marginal de X_i y $c(u_1, \dots, u_n)$ es la densidad de la cópula,

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \quad (3)$$

Tal como se observa en la ecuación 2, la densidad de probabilidad conjunta es igual a la densidad de la cópula multiplicada por el producto de las funciones de densidad marginales de las variables. Por lo tanto, toda la información sobre el patrón de dependencia estadística o estructura de asociación entre las variables

está contenida íntegramente en la cópula puesto que las densidades marginales, $f_i(x_i)$, que caracterizan individualmente a cada una de las variables, no contienen dicha información.

Existe una gran variedad de tipos o familias de cópulas. Entre las familias comúnmente utilizadas en diversas disciplinas se encuentran las cópulas arquimedianas, tales como las cópulas de Frank, Gumbel y Clayton, reconocidas por la facilidad con que pueden ser construidas y por la gran variedad de patrones de dependencia que permiten reproducir (Salvadori *et al.*, 2007), así como la cópula Gaussiana con la que se pueden modelar estructuras de dependencia definidas mediante matrices de correlación lineal. Estas familias de cópulas se presentan en la tabla 1 para el caso bivariado en que $n = 2$.

Para la estimación estadística de los parámetros de las cópulas se cuenta con métodos de máxima verosimilitud (Genest y Favre, 2007). En el caso de cópulas de un sólo parámetro, como las cópulas bivariadas de Frank, Gumbel, Clayton y Gaussiana mostradas en la tabla 1, se pueden usar estimadores definidos en términos de medidas de asociación como el τ de Kendall o el ρ de Spearman (Lebrun y Dutfoy, 2009). Estas medidas son estimadores cuantitativos del grado de asociación estadística entre dos variables y cumplen con las siguientes propiedades: (1) varían en el intervalo $[-1,1]$; (2) son iguales a cero si las variables son estadísticamente independientes; y (3) son invariantes bajo transformaciones monótonas de las variables. El coeficiente de correlación lineal, que ha sido utilizado ampliamente en diversas disciplinas, principalmente debido a la facilidad con que puede ser estimado y por su utilidad en la construcción de modelos multivariados de tipo gaussiano, no es rigurosamente una medida de asociación. Como se sabe, dicho coeficiente es una medida de la dependencia lineal entre dos variables y permite modelar distribuciones conjuntas de tipo gaussiano en las que la estructura de dependencia se puede caracterizar apropiadamente mediante la correlación lineal. Sin embargo, no cumple con la tercera propiedad de las medidas de asociación. El cálculo del coeficiente de correlación lineal involucra el uso de las distribuciones marginales de probabilidad de las variables, las cuales no contienen información sobre la asociación estadística entre éstas. Por otro lado, una de las propiedades de las cópulas es que son invariantes ante transformaciones monótonas de las variables. Dado que como se observa en la ecuación 2, la estructura de asociación o de dependencia entre las variables depende exclusivamente de la cópula, una medida apropiada de dicha asociación o dependencia debe exhibir también la misma propiedad invariante de las cópulas.

Tabla 1. Ejemplos de cópulas paramétricas y relaciones funcionales con τ de Kendall

Nombre	Cópula	Parámetro	τ de Kendall
Gaussiana ⁽¹⁾	$C(u, v) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v); \rho)$	$-1 \leq \rho \leq 1$	$\tau = 2 \arcsen(\rho)/\pi$ $\tau = 1 - 4/\theta$
Frank	$C(u, v) = -\theta^{-1} \ln[1 + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)/(e^{-\theta} - 1)]$	$\theta \neq 0$	$+4/\theta^2 \int_0^\theta t/(e^t - 1) dt$
Gumbel	$C(u, v) = \exp\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\}$	$\theta \geq 1$	$\tau = 1 - 1/\theta$
Clayton	$C(u, v) = (u_1^{-\theta} + v_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$\theta \neq 0$	$\tau = \frac{\theta}{\theta + 2}$

⁽¹⁾ $\Phi_2(\cdot, \cdot; \rho)$ denota la distribución normal bivariada con coeficiente de correlación lineal ρ

En este trabajo se utiliza el τ de Kendall como medida de asociación para la estimación de las cópulas. El τ de Kendall se define como la diferencia entre las probabilidades de concordancia y de discordancia de dos vectores estadísticamente independientes e idénticamente distribuidos, (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) ,

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (4)$$

Si $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$ es una muestra aleatoria de un par de variables (X, Y) , el τ de Kendall se estima como,

$$\hat{\tau} = \frac{P_n - Q_n}{\binom{n}{2}} = \frac{4}{n(n-1)} P_n - 1 \quad (5)$$

donde, P_n y Q_n son el número de pares de datos concordantes y discordantes en la muestra (Genest y Favre, 2007). Sean $(R_i, S_i), i = 1, \dots, n$, los rangos de las observaciones en la muestra aleatoria (X_i, Y_i) . Puesto que $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0$ sí y solo sí $(R_i - R_j)(S_i - S_j) > 0$, el τ de Kendall es entonces una función de los rangos y del mismo modo que éstos, se mantiene invariante bajo transformaciones monótonas de las variables. Usando la ecuación 5, se puede demostrar que cuando $n \rightarrow \infty$, $\hat{\tau}$ es un estimador asintótico centrado del τ de Kendall dado por Genest y Favre, (2007),

$$\tau = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (6)$$

donde, $C(u, v)$ es la cópula del par de variables (X, Y) , $u = F_X(x)$, $v = F_Y(y)$. Mediante la ecuación 6, se pueden obtener relaciones funcionales entre el τ de Kendall y el parámetro θ de la cópula, tal como se muestran en la tabla 1. El estimado del parámetro de una cópula se puede entonces obtener como $\hat{\theta} = g(\hat{\tau})$, donde $\theta = g(\tau)$ es la relación funcional que se muestra en la tabla 1. Genest y Favre (2007) han desarrollado formulaciones para calcular los estadísticos (media y varianza) del estimador $\hat{\theta} = g(\hat{\tau})$.

ANÁLISIS MULTIVARIADO DE PELIGRO SÍSMICO

Consideremos un conjunto $X = (X_1, \dots, X_n)$ de medidas de intensidad del movimiento sísmico del suelo requeridas para caracterizar una demanda de capacidad o de respuesta de una estructura. De acuerdo con la ecuación 2, la función de densidad de probabilidad $f_X(x_1, \dots, x_n | m, r)$ se puede escribir en términos de la densidad de la cópula correspondiente y de las densidades marginales condicionales a $M = m$ y $R = r$

$$f_X(x_1, \dots, x_n | m, r) = c\{u_1, \dots, u_n | m, r\} \prod_{i=1}^n f_i(x_i | m, r) \quad (7)$$

donde, $u_i = F_i(x_i | m, r)$, $i = 1, \dots, n$, y $F_i(x_i | m, r)$ y $f_i(x_i | m, r)$ son las distribuciones y las densidades de probabilidad condicionales de las medidas de intensidad, respectivamente. Nótese que no solamente los argumentos de la densidad condicional de la cópula, $c\{u_1, \dots, u_n | m, r\}$, dependen de M y R , sino también la propia función.

La densidad de la tasa media de eventos (x_1, \dots, x_n) considerando una fuente sísmica se define como (Bazurro, 1998; Bazurro y Cornell, 2002),

$$\nu_X(x_1, \dots, x_n) = \lambda_o \iint f_X(x_1, \dots, x_n | m, r) f_{M,R}(m, r) dm dr \quad (8)$$

donde, λ_o es la tasa de ocurrencia de eventos de magnitud mayor que un límite inferior. La ecuación 8 es una extensión de la expresión propuesta por Esteve (1970) para el análisis univariado. Sustituyendo la ecuación 7 en la ecuación 8, se obtiene,

$$v_X(x_1, \dots, x_n) = \lambda_o \iint c\{u_1, \dots, u_n | m, r\} \prod_{i=1}^n f_i(x_i | m, r) f_{M,R}(m, r) dm dr \quad (9)$$

Cuando se consideran N fuentes sísmicas, la densidad de la tasa media de eventos (x_1, \dots, x_n) se calcula mediante la suma de las contribuciones de cada una de ellas,

$$v_X(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \left\{ \iint c\{u_1, \dots, u_n | m, r\} \prod_{k=1}^n f_k(x_k | m, r) f_{M,R}(m, r) dm dr \right\}_i \quad (10)$$

donde, λ_i , $i = 1, \dots, N$, son las tasas de ocurrencia de sismos de magnitud mayor que una cierta magnitud mínima en cada fuente.

Tal como se muestra en la ecuación 9, la caracterización multivariada de las medidas de intensidad se introduce en el análisis a través de la densidad de la cópula $c\{u_1, \dots, u_n | m, r\}$ condicional a M y R . Supongamos ahora que es de interés evaluar la tasa media de excedencia de una cierta demanda de capacidad o de respuesta sísmica γ de una estructura. Si $P(\gamma > z | x_1, \dots, x_n)$ denota la probabilidad de excedencia, condicional a (x_1, \dots, x_n) , dicha tasa es

$$\lambda_\gamma(z) = \iint \dots \int P(\gamma > z | x_1, \dots, x_n) v_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (11)$$

Consideremos como ejemplo el caso de la estimación de la tasa media de excedencia de la distorsión máxima de entrepiso, γ_{max} , de un edificio alto de periodo largo en el que la contribución del segundo modo de vibrar sea relevante. Sean S_{a1} y S_{a2} las pseudo-aceleraciones espectrales en los dos primeros periodos de vibración de la estructura, T_1 y T_2 . De acuerdo con la ecuación 7, la densidad de probabilidad conjunta de S_{a1} y S_{a2} , condicional a $M = m$ y $R = r$ es igual a

$$f_{S_a}(a_1, a_2 | m, r) = c_{S_a}(u, v | m, r) f_{S_{a1}}(a_1 | m, r) f_{S_{a2}}(a_2 | m, r) \quad (12)$$

En la ecuación 12, $c_{S_a}(u, v | m, r)$ denota la densidad de la copula condicional de las pseudo-aceleraciones S_{a1} y S_{a2} ,

$$u = F_{S_{a1}}(a_1 | m, r) \quad (13.a)$$

$$v = F_{S_{a2}}(a_2 | m, r) \quad (13.b)$$

y $F_{S_{a1}}(a_1 | m, r)$, $F_{S_{a2}}(a_2 | m, r)$, $f_{S_{a1}}(a_1 | m, r)$, $f_{S_{a2}}(a_2 | m, r)$, son las funciones de distribución y de densidad de probabilidad marginales de dichas variables condicionales a $M = m$ y $R = r$, respectivamente. La densidad de la tasa media de eventos de pseudo-aceleraciones espectrales (a_1, a_2) está dada por:

$$v_{S_a}(a_1, a_2) = \lambda_o \iint c_{S_a}(u, v | m, r) f_{S_{a1}}(a_1 | m, r) f_{S_{a2}}(a_2 | m, r) f_{M,R}(m, r) dm dr \quad (14)$$

En caso de que se consideren N fuentes sísmicas, $v_{Sa}(a_1, a_2)$ está dada por

$$v_{Sa}(a_1, a_2) = \sum_{i=1}^N \lambda_i \left\{ \iiint c_{Sa}(u, v|m, r) f_{S_{a1}}(a_1|m, r) f_{S_{a2}}(a_2|m, r) f_{M,R}(m, r) dm dr \right\}_i \quad (15)$$

donde, λ_i es la tasa de ocurrencia de eventos correspondiente a cada fuente. La tasa de excedencia de la distorsión máxima de entrepiso es entonces,

$$\lambda_{\gamma_{max}}(z) = \iint P(\gamma_{max} > z | a_1, a_2) v_{Sa}(a_1, a_2) da_1 da_2 \quad (16)$$

EJEMPLO DE APLICACIÓN

La formulación multivariada se aplicó con fines de ilustración a la estimación de la tasa media de excedencia de la distorsión de entrepiso máxima en edificios. Se consideró un modelo de regresión de la distorsión de entrepiso máxima de un edificio de acero de 20 niveles en función de las aceleraciones espectrales asociadas con las frecuencias de los dos primeros modos de vibrar (Bazurro y Cornell, 2002). Para los fines de este ejemplo, el edificio se sometió a un tipo de excitación que genere una contribución importante de la respuesta asociada con el segundo modo y pueda entonces apreciarse la diferencia entre los resultados del análisis multivariado y del univariado.

El modelo de Bazurro y Cornell (2002) fue desarrollado mediante análisis dinámicos no-lineales paso a paso de un marco de acero del edificio de 20 niveles que se muestra en la figura 1, el cual fue empleado por Shome y Cornell (1999) en un estudio de demanda sísmica. Se trata de un marco interior de un edificio con planta regular que tiene cinco crujeías cuyos claros son de 6.10 m; la altura del primer entrepiso es de 5.50 m y las alturas de los entrepisos superiores son de 4 m. Las frecuencias y periodos de los dos primeros modos de vibración son $f_1 = 0.25$ Hz ($T_1 = 4$ s) y $f_2 = 0.75$ Hz ($T_2 = 1.33$ s); para mayor información sobre la estructura se puede consultar el trabajo de Gupta y Krawinkler (1999).

Se usaron registros de sismos de subducción de estaciones ubicadas en la zona II de transición de la Ciudad de México. Los nombres de las estaciones y la relación de sismos considerados se indican en la tabla 2. Los registros corresponden a sismos con magnitudes M_w entre 5 y 8.1, y distancias epicentrales comprendidas entre 283 km y 421 km. Los espectros de respuesta de los registros seleccionados se muestran en la figura 2 para una fracción de amortiguamiento crítico igual a 5%. En dicha figura se indican los dos primeros periodos del modelo de edificio de acero. Dada la forma que guardan los espectros en la zona de transición, se observan mayores aceleraciones espectrales para la segunda forma modal del edificio en relación con el modo fundamental; el periodo de la segunda forma modal se encuentra en la región de mayor demanda de aceleración de la zona de transición de la Ciudad de México. Para el modo fundamental de vibración del edificio se pueden alcanzar aceleraciones espectrales de hasta 25 gal, mientras que para la segunda forma modal éstas son superiores a los 100 gal.

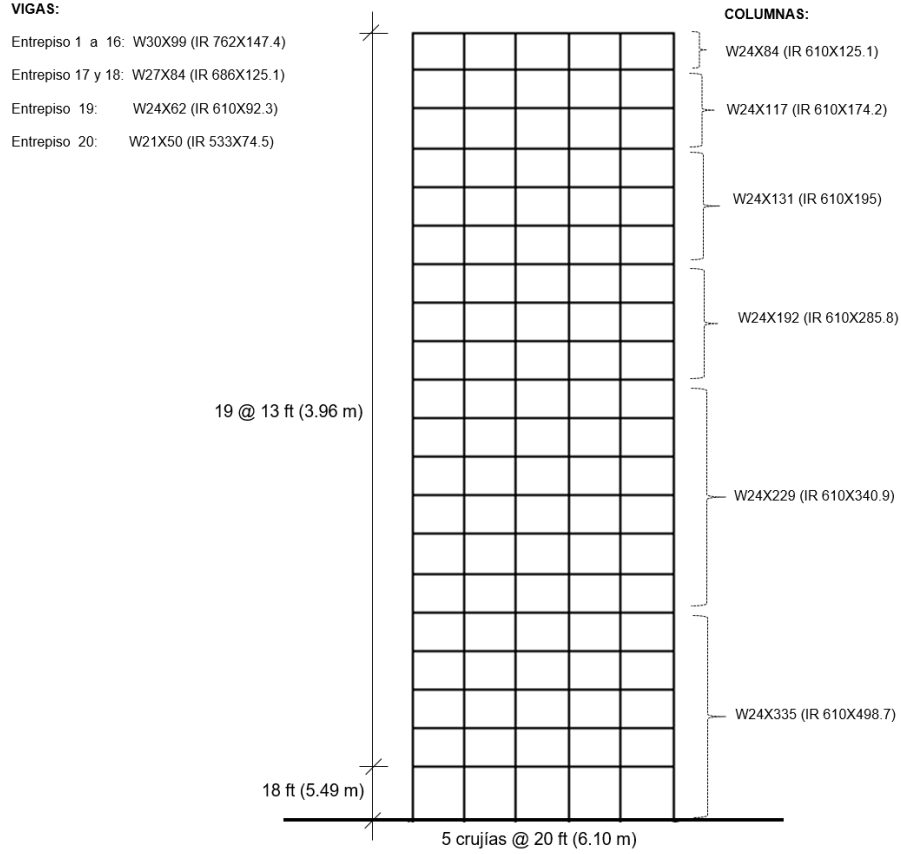


Figura 1. Características geométricas del edificio de acero (Gupta y Krawinkler, 1999)

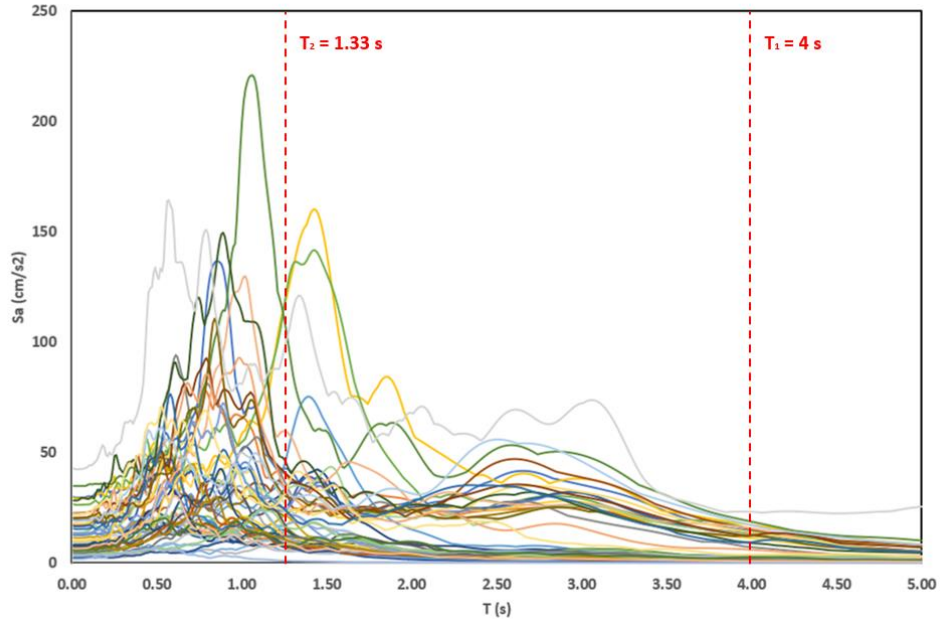


Figura 2. Espectros de respuesta para diferentes sismos de la zona II, transición, de la Ciudad de México

Tabla 2. Catálogo de sismos y estaciones empleadas en la zona de transición de la Ciudad de México

NÚMERO DE REGISTRO	ESTACIÓN	FECHA EVENTO	M _w	PROFUNDIDAD (km)	EPICENTRO	R (km)
1	SISMEX VIVEROS	1985/09/19	8.1	-	MICHOACAN	421.28
2	SISMEX VIVEROS	1985/09/21	7.6	-	GUERRERO	283.97
3	SISMEX VIVEROS	1989/04/25	6.9	-	GUERRERO	307.11
4	ANGEL URRAZA	1989/04/25	6.9	19	GUERRERO	309.90
5	ANGEL URRAZA	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	342.84
6	ANGEL URRAZA	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	300.10
7	CULHUACAN	1989/04/25	6.9	19	GUERRERO	304.43
8	CULHUACAN	1993/10/24	6.7	< 5	GUERRERO	310.42
9	CULHUACAN	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	336.60
10	CULHUACAN	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	298.96
11	COYOACAN	1989/04/25	6.9	19	GUERRERO	308.55
12	COYOACAN	1993/10/24	6.7	< 5	GUERRERO	315.24
13	COYOACAN	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	341.53
14	COYOACAN	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	299.31
15	ESTACION No.6, COYOACAN, pozo 12m	1993/10/24	6.7	-	GUERRERO	328.41
16	ESTACION No.6, COYOACAN, pozo 12m	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	338.94
17	ESTACION No.6, COYOACAN, pozo 12m	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	297.58
18	ESTACION No.6, COYOACAN, pozo 70m	1993/10/24	6.7	-	GUERRERO	328.41
19	ESTACION No.6, COYOACAN, pozo 70m	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	338.94
20	ESTACION No.6, COYOACAN, pozo 70m	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	297.58
21	ESTACION No.6, COYOACAN, superficie	1993/10/24	6.7	-	GUERRERO	328.41
22	ESTACION No.6, COYOACAN, superficie	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	338.94
23	ESTACION No.6, COYOACAN, superficie	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	297.58
24	DEPORTIVO REYNOSA	1989/04/25	6.9	19	GUERRERO	322.86
25	DEPORTIVO REYNOSA	1993/10/24	6.7	< 5	GUERRERO	329.74
26	DEPORTIVO REYNOSA	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	308.77
27	XOTEPINGO	1989/04/25	6.9	19	GUERRERO	304.47
28	XOTEPINGO	1993/10/24	6.7	< 5	GUERRERO	310.75
29	XOTEPINGO	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	336.98
30	XOTEPINGO	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	298.20
31	ESPARZA OTEO	1989/04/25	6.9	19	GUERRERO	310.49
32	ESPARZA OTEO	1993/10/24	6.7	< 5	GUERRERO	317.28
33	ESPARZA OTEO	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	343.59
34	ESPARZA OTEO	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	299.94
35	ESCANDON	1989/04/25	6.9	19	GUERRERO	311.93
36	ESCANDON	1993/10/24	6.7	< 5	GUERRERO	318.72
37	ESCANDON	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	345.03
38	ESCANDON	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	301.25
39	GRANJAS	1989/04/25	6.9	19	GUERRERO	320.00
40	GRANJAS	1993/10/24	6.7	< 5	GUERRERO	326.84
41	GRANJAS	1995/09/14	7.3	22	GUERRERO	353.14
42	JARDINES DE COYOACAN	1996/07/15	5.0	17.6	GUERRERO	293.00
43	JARDINES DE COYOACAN	1993/10/24	6.9	3	OAXACA	402.54
44	JARDINES DE COYOACAN	1995/09/14	5.2	18	OAXACA	341.44
45	ESC. SEC. TÉC. "RAFAÉL DONDÉ"	1993/10/24	5.7	7	GUERRERO	285.18
46	MARIANO ESCOBEDO	1995/09/14	5.9	15.8	GUERRERO	315.83
47	MARIANO ESCOBEDO	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	303.61
48	MARISCAL TITO	1989/04/25	6.9	19	GUERRERO	314.38
49	MARISCAL TITO	1993/10/24	6.7	-	GUERRERO	321.36
50	MARISCAL TITO	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	301.97
51	MARISCAL TITO	1996/07/15	6.8	20	GUERRERO	301.97

Para la caracterización multivariada del peligro sísmico se utilizaron los datos de las aceleraciones espectrales S_{a1} y S_{a2} , asociadas con los periodos modales T_1 y T_2 , obtenidas de los registros. La gráfica de dispersión de los rangos normalizados de las aceleraciones espectrales S_{a1} y S_{a2} se muestra en la figura 3. Se observa que la relación de dependencia entre ambas variables no es estrictamente lineal. Con base en esta muestra se obtuvo un estimado del τ de Kendall igual a 0.622 usando el paquete Copula de R (R Core Team, 2020; Hofert *et al.*, 2020). Este valor representa un grado de asociación significativo entre las variables. El valor positivo indica que cuando una de las variables se incrementa (o disminuye) es más probable que la otra también se incremente (o disminuya).

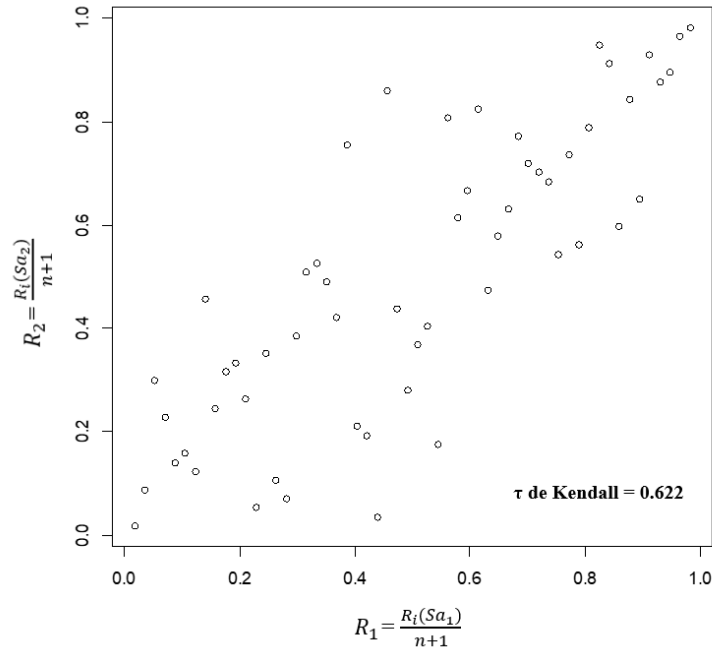


Figura 3. Rangos normalizados de las aceleraciones espectrales S_{a1} y S_{a2} en la zona II de transición de la Ciudad de México

Los parámetros de las cópulas de Frank, Gumbel, Clayton y Gaussiana se estimaron en función del valor estimado del τ de Kendall mediante las relaciones funcionales mostradas en la tabla 1. La tabla 3 muestra los valores de los parámetros estimados y sus correspondientes desviaciones estándar. Los coeficientes de variación de los estimados son del orden de 10 a 20%. Estos valores dependen, como en cualquier problema de inferencia estadística, del tamaño de la muestra de datos y, desde luego, se reducirían en caso de contar con un mayor número de registros. Para los fines de este estudio se considera que dichos valores son aceptables. Se realizaron pruebas de bondad de ajuste para cópulas usando el estadístico de Cramér-von Mises S_n basado en la cópula empírica y el estadístico S_n^B basado en la transformación de Rosenblatt. Una descripción detallada de estos estadísticos se presenta en el apéndice A. Los valores p de las pruebas de bondad se obtienen usando un método de bootstrap propuesto por Genest *et al.* (2009). Para el cálculo de los estadísticos y de los valores p de estas pruebas se usó el paquete Copula de R (R Core Team, 2020; Hofert *et al.*, 2020). Los resultados de las pruebas de bondad de ajuste se muestran en la tabla 3. El modelo de Gumbel proporciona en ambas pruebas los menores valores de los estadísticos y en consecuencia los mayores valores p . Si bien el modelo Gaussiano no se rechaza, presenta valores p menores que los de las cópulas de Gumbel y de Frank. El modelo de Clayton se rechaza con un nivel de significación igual a 5%.

Se aplicaron adicionalmente los criterios de Akaike y bayesiano para selección de cópulas, los cuales están basado en teoría de la información (Akaike, 1973; Schwarz, 1978). Estos criterios permiten comparar puntajes entre diferentes modelos y se selecciona aquel que resulta en un menor puntaje. La formulación para la aplicación de estos criterios se presenta aen el Apéndice A. Los criterios AIC y BIC (por sus siglas en inglés) miden la diferencia entre la parsimonia de un modelo, representada por el número de parámetros del modelo, y su bondad de ajuste, representada por la función de verosimilitud. Los criterios favorecen aquellos modelos con mayor bondad de ajuste y penalizan aquellos que tienen un mayor número de parámetros. Se presupone que un mejor modelo es aquel que con menos parámetros puede representar mejor los datos. Dada la formulación lineal con la que se definen estos criterios (ver Apéndice A), el puntaje que resulta de estos criterios puede ser un valor positivo o negativo dependiendo del valor de la función de verosimilitud y del número de parámetros. Independientemente de esto, el criterio de selección consiste en escoger, entre un grupo de modelos candidatos, aquel que tiene el menor puntaje. Dado que en este trabajo los modelos de cópulas tienen sólo un parámetro, la comparación entre los modelos depende exclusivamente del valor de la función de verosimilitud. Los resultados que se muestran en la tabla 4 indican que con el modelo de Gumbel se obtiene el menor puntaje. Los modelos de Frank y Gaussiano obtienen valores similares sin que se muestre una clara diferencia a favor de uno de ellos. Claramente el modelo de Clayton no resulta favorecido, observación que coincide con los resultados de las pruebas de bondad de ajuste. Se seleccionó por tanto el modelo de Gumbel como el que mejor representa el patrón de dependencia entre los datos de aceleraciones espectrales. La densidad de la cópula de Gumbel se muestra en la figura 4. En la figura 5 se muestran iso-contornos de la cópula de Gumbel comparados con la cópula empírica de los datos de aceleraciones espectrales. La cópula empírica sólo depende de los datos de una muestra; se define en términos de un estadístico de orden y es una representación no paramétrica del patrón de dependencia entre las variables. La comparación con la cópula empírica que se muestra en la figura 5 sugiere que el modelo de Gumbel seleccionado representa los datos adecuadamente.

Tabla 3. Parámetros de cópulas y resultados de pruebas de bondad de ajuste

Cópula	θ	σ_θ	S_n		$S_n^{(B)}$	
			Estadístico	Valor p	Estadístico	Valor p
Frank	8.55	0.975	0.0258	0.28	0.03476	0.65
Gaussiana	0.77	0.046	0.0238	0.26	0.05460	0.28
Clayton	3.29	0.731	0.0541	0.002	0.1588	0.002
Gumbel	2.65	0.366	0.0198	0.52	0.02969	0.81

Tabla 4. Evaluación de criterios Akaike (AIC) y Bayesiano (BIC) de selección de cópulas

Cópula	AIC	BIC
Frank	-55.51	-53.49
Gaussiana	-56.66	-54.64
Clayton	-25.49	-23.47
Gumbel	-63.67	-61.64

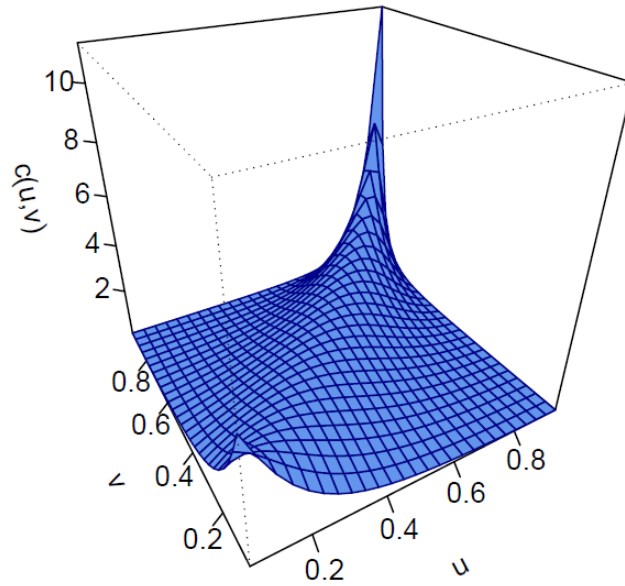


Figura 4. Densidad del modelo seleccionado de cópula de Gumbel

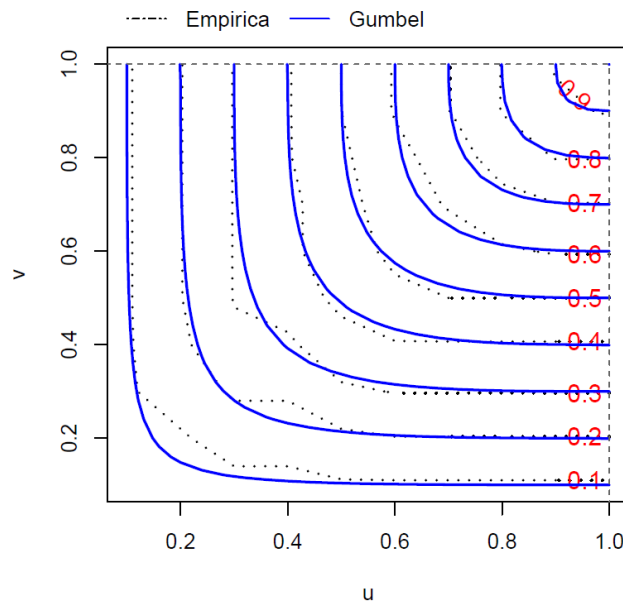


Figura 5. Iso-contornos de la cópula de Gumbel y de la cópula empírica

Las distribuciones marginales de las aceleraciones espectrales se modelaron con base en la ley de atenuación espectral estimada por Reyes *et al.* (2002) y el uso de cocientes espectrales de respuesta. Empleando registros de sismos de subducción de la estación CU en suelo firme, Reyes *et al.* (2002) estimaron mediante un método de regresión bayesiana los coeficientes de la ley de atenuación espectral,

$$E[\ln Sa_r(T)|m, r] = \alpha_1(T) + \alpha_2(T)(m - 6) + \alpha_3(T)(m - 6)^2 + \alpha_4(T) \ln r + \alpha_5(T) r \quad (17)$$

basada en la propuesta por Joyner y Boore (1988); $Sa_r(T)$ es la aceleración espectral en suelo firme en cm/s^2 , T es el periodo estructural en segundos, m es la magnitud de momento, r es la distancia más corta del sitio al área de ruptura en km y $\alpha_i(T)$ son los coeficientes del modelo. La razón de emplear esta ley de atenuación, obedeció a que está calibrada para obtener aceleraciones espectrales en roca (estación CU) para sismos de la fuente de subducción, lo cual sirve de base para obtener la aceleración espectral tanto en suelo blando como en suelo de transición a través de cuantificar el efecto de sitio mediante un cociente espectral de respuesta. En este trabajo se consideró que $R = 300$ km y se adoptaron los estimados de los coeficientes del modelo para el componente N-S, los cuales se muestran en la tabla 5 para los dos periodos modales. Las desviaciones estándar del modelo de ley de atenuación son $\sigma[\ln Sa_r(T_1 = 4)] = 0.603$ y $\sigma[\ln Sa_r(T_2 = 1.33)] = 0.495$. En el modelo de Reyes *et al.* (2002), la desviación estándar no es función de m y r , y depende solamente del periodo estructural.

Tabla 5. Coeficientes de la ley de atenuación espectral para los periodos del modelo estructural (Reyes *et al.*, 2002)

Periodo (s)	$\alpha_1(T)$	$\alpha_2(T)$	$\alpha_3(T)$	$\alpha_4(T)$	$\alpha_5(T)$
$T_1 = 4$	3.5766	1.6188	-0.0533	-0.5	-0.0024
$T_2 = 1.33$	6.2425	1.4168	0.0365	-0.5	-0.0063

La distribución de probabilidad de las aceleraciones espectrales en la zona de transición se obtuvo a partir de la distribución en suelo firme mediante el uso de cocientes espectrales de respuesta. Un cociente espectral es la relación entre un espectro de respuesta en un suelo blando y el espectro de respuesta en suelo firme. Los cocientes espectrales se pueden estimar mediante espectros de amplitudes de Fourier de los registros en suelo blando y suelo firme. Suponiendo que el espectro de amplitudes de Fourier es una estimación de la función de densidad espectral, el cociente espectral se puede interpretar como una función de transferencia empírica. La técnica está basada en un comportamiento predominante lineal del suelo y en un modelado unidimensional. Una vez que se cuenta con el espectro de amplitudes de Fourier en suelo blando se puede calcular el espectro de respuesta aplicando teoría de vibraciones aleatorias. Alternativamente, los cocientes espectrales pueden estimarse también calculando el cociente entre los espectros de respuesta en un suelo blando y suelo firme. La aproximación que se obtiene en este caso es similar a la del empleo de espectros de Fourier (Rosenblueth y Arciniega, 1992). Los cocientes espectrales $H(T)$ se estimaron con la relación de los espectros de respuesta de las estaciones de la zona de transición (tabla 2) y el espectro correspondiente de la estación CU. Las figuras 6 y 7 muestran los cocientes espectrales en función del periodo para las direcciones N-S y E-W; se muestra también el valor medio de los cocientes espectrales. Se puede notar que las mayores amplificaciones promedio en ambas direcciones horizontales se presentan en periodos alrededor de 1 s, cercanos al periodo del segundo modo de la estructura. Los valores máximos de los cocientes espectrales son del orden de 6 a 10 en las direcciones N-S y E-W, respectivamente. Para efectos de este estudio se consideró el mayor cociente espectral en ambas direcciones para el periodo del segundo modo, el cual corresponde a un valor $H(4) = 5.48$, cuyo valor asociado para el periodo del primer modo es $H(1.33) = 1.47$.

El valor medio del logaritmo de la aceleración espectral en el sitio, dados M y R , se calcula entonces como

$$E[\ln Sa(T)|m, r] = \ln H(T) + E[\ln Sa_r(T)|m, r] \quad (18)$$

En el caso de la desviación estándar, $\sigma[\ln Sa(T)] = \sigma[\ln Sa_r(T)]$. Las distribuciones y densidades de probabilidad marginales de las pseudo-aceleraciones se pueden calcular entonces como,

$$F_{S_a}(a|m, r) = \Phi\left(\frac{\ln a - E[\ln S_a | m, r]}{\sigma[\ln S_a]}\right) \quad (19)$$

$$f_{S_a}(a|m, r) = \frac{1}{a\sigma[\ln S_a]} \phi\left(\frac{\ln a - E[\ln S_a | m, r]}{\sigma[\ln S_a]}\right) \quad (20)$$

en donde, $\Phi(\cdot)$ y $\phi(\cdot)$ son las funciones de distribución y de densidad de probabilidad normal estándar, respectivamente, considerando para la aceleración espectral una distribución log-normal.

Empleando las ecuaciones 19 y 20, y el modelo seleccionado de cópula de Gumbel, se pueden calcular las funciones de densidad de probabilidad conjuntas de las aceleraciones espectrales de acuerdo con la ecuación 12. La figura 8 muestra las densidades de probabilidad conjuntas de S_{a1} y S_{a2} para magnitudes $M_w=7$ y 8. Se observa una asociación estadística significativa entre las aceleraciones espectrales que se deriva del valor muestral del τ de Kendall. La influencia de la magnitud se evidencia en intervalos de valores notablemente mayores de aceleración espectral para contornos con la misma densidad de probabilidad. Cabe destacar que aun cuando no se ha adoptado un modelo de cópula cuya forma funcional dependa de la magnitud, el argumento (u, v) de la cópula sí depende de la magnitud a través de las funciones de distribución de las aceleraciones espectrales, tal como se muestra en la ecuación 13.

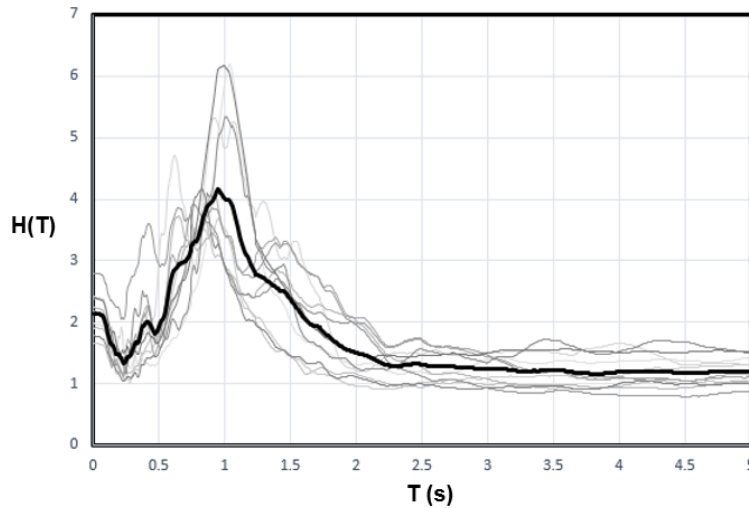


Figura 6. Cocientes espectrales para la aceleración espectral en la zona de transición (componente N-S); la curva gruesa muestra el valor promedio

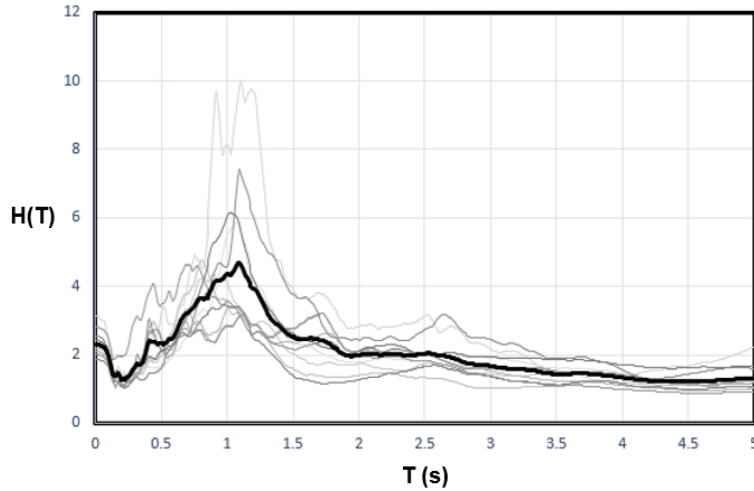


Figura 7. Cocientes espectrales para la aceleración espectral en la zona de transición (componente E-W); la curva gruesa muestra el valor promedio

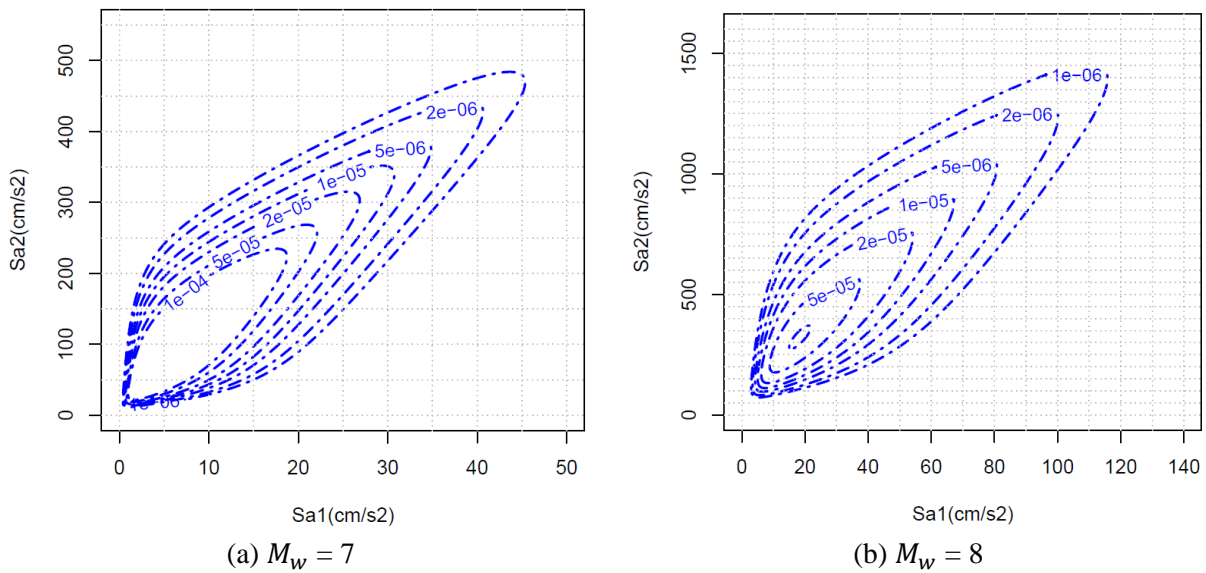


Figura 8. Iso-contornos de funciones de densidad de probabilidad conjunta de las aceleraciones espectrales S_{a1} y S_{a2}

En el análisis de peligro sísmico, se ha usado ampliamente la ley de Gutenberg y Richter (1944), mediante la cual la tasa anual de ocurrencia sismos de magnitud mayores que M en una fuente se puede expresar como,

$$\lambda(m) = \exp(\alpha - \beta m) \tag{21}$$

donde, α y β son los parámetros del modelo. Cornell y Vanmarcke (1969) propusieron un modelo de tasa de excedencia que toma en cuenta un límite superior M_u para las magnitudes,

$$\lambda(m) = \lambda_o \frac{e^{-\beta m} - e^{-\beta M_u}}{e^{-\beta M_o} - e^{-\beta M_u}}; M_o \leq m \leq M_u \quad (22)$$

En la ecuación 22, λ_o es la tasa de excedencia de la magnitud M_o . La función de densidad de magnitud queda definida entonces por,

$$f_M(m) = -\frac{1}{\lambda_o} \frac{\partial \lambda(m)}{\partial m} = \frac{\beta e^{-\beta m}}{e^{-\beta M_o} - e^{-\beta M_u}} \quad (23)$$

En este estudio se usaron los valores $\lambda_o = 4.79$ (1/año) y $\beta = 2$ de acuerdo con el Manual de Obras Civiles, Diseño por Sismo (CFE, 2015).

Para la distorsión máxima de entrepiso γ_{max} , se empleó el modelo de regresión desarrollado por Shome y Cornell (1999) considerando la contribución de las aceleraciones espectrales (Sa_1, Sa_2) asociadas con las frecuencias del modo fundamental y del segundo modo de vibrar del edificio, por lo que la ecuación está dada por,

$$E[\ln \gamma_{max} | Sa_1, Sa_2] = -2.49 + 0.58 \ln Sa_1(f_1) + 0.62 \ln Sa_2(f_2) \quad (24)$$

expresada en función de dichas aceleraciones espectrales de los dos primeros modos, $f_1 = \frac{1}{T_1} = 0.25$ Hz y $f_2 = \frac{1}{T_2} = 0.75$ Hz. La desviación estándar del modelo de regresión es, $\sigma[\ln \gamma_{max}] = 0.23$. La probabilidad de excedencia de la respuesta γ_{max} en la ecuación 16, dado que $Sa_1(f_1) = a_1$ y $Sa_2(f_2) = a_2$, se calcula suponiendo una distribución log-normal, como sigue,

$$P(\gamma_{max} > z | a_1, a_2) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln z - E[\ln \gamma_{max} | a_1, a_2]}{\sigma[\ln \gamma_{max}]}\right) \quad (25)$$

Con fines comparativos, se realizó adicionalmente un análisis de peligro sísmico univariado considerando como medida de intensidad escalar la aceleración espectral asociada con el periodo fundamental de la estructura. Análogamente a la ecuación 16, en este caso la tasa media de excedencia de la distorsión máxima de entrepiso está dada por,

$$\lambda_{\gamma_{max}}(z) = \int P(\gamma_{max} > z | a_1) \nu_{Sa}(a_1) da_1 \quad (26)$$

La tasa media de eventos de densidad de aceleración espectral a_1 , se calcula de acuerdo con la ecuación 14, como,

$$\nu_{Sa}(a_1) = \lambda_o \iint f_{Sa_1}(a_1 | m, r) f_{M,R}(m, r) dm dr \quad (27)$$

El modelo de regresión desarrollado por Shome y Cornell (1999) para la distorsión máxima de entrepiso γ_{max} del marco de 20 niveles en función de la aceleración espectral Sa_1 , está dado por

$$E[\ln \gamma_{max} | Sa_1] = -2.32 + 0.70 \ln Sa(f_1) \quad (28)$$

con una desviación estándar $\sigma[\ln \gamma_{max}] = 0.37$; la dispersión de este modelo es mayor que la del modelo de regresión expresado en función de las dos aceleraciones espectrales. Se tiene entonces, que

$$P(\gamma_{max} > z | a_1) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln z - E[\ln \gamma_{max} | a_1]}{\sigma[\ln \gamma_{max}]}\right) \quad (29)$$

Tabla 6. Tasa media anual de excedencia de distorsión máxima de entepiso

z	$\lambda_{\gamma_{max}}(z)$	
	Formulación multivariada	Formulación univariada
0.005	0.05470	0.19400
0.010	0.01281	0.03565
0.015	0.00344	0.00985
0.020	0.00079	0.00330
0.025	0.00015	0.00125
0.030	0.00003	0.00052

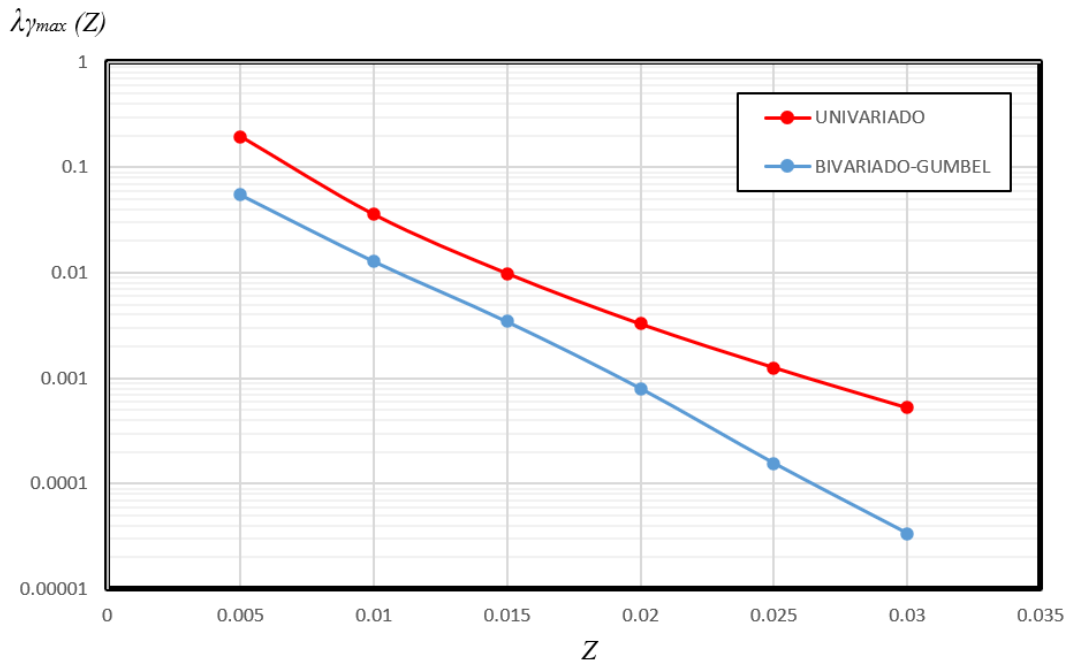


Figura 9. Tasa media anual de excedencia de distorsión máxima de entepiso

Los resultados del cálculo de las tasas anuales de excedencia para diferentes distorsiones de entepiso máximas se muestran en la tabla 6, mientras que en la figura 9 se muestran las curvas de tasas de excedencia correspondientes. El cálculo se realizó con un programa desarrollado con el lenguaje R (R Core Team, 2020). En este ejemplo, el empleo de la formulación multivariada produjo estimados significativamente menores. La tasa de excedencia calculada con el análisis univariado es del orden de tres a cuatro veces mayor que la tasa que se obtiene con la formulación multivariada para distorsiones entre 0.01 y 0.02. Para distorsiones mayores, la diferencia entre las tasas se incrementa aún más. Estos resultados reflejan la influencia que la aceleración espectral asociada al segundo modo tiene en la caracterización de la respuesta no lineal en este caso. El origen fundamental de estas diferencias se puede identificar en las ecuaciones 16

y 26 para el cálculo de las tasas de excedencia. La tasa de excedencia en la formulación univariada, se puede escribir como,

$$\lambda_{\gamma_{max}}(z) = \lambda_o \iiint P(\gamma_{max} > z | a_1) f_{S_{a1}}(a_1 | m, r) f_{M,R}(m, r) dm dr da_1 \quad (30)$$

Por otro lado, la tasa de excedencia de la respuesta en la formulación multivariada se puede escribir a partir de la ecuación 14 como sigue,

$$\lambda_{\gamma_{max}}(z) = \lambda_o \iiint \bar{P}_{S_{a2}}(\gamma_{max} > z | a_1; m, r) f_{S_{a1}}(a_1 | m, r) f_{M,R}(m, r) dm dr da_1 \quad (31)$$

donde

$$\bar{P}_{S_{a2}}(\gamma_{max} > z | a_1; m, r) = \int P(\gamma_{max} > z | a_1, a_2) c_{S_a}(u, v | m, r) f_{S_{a2}}(a_2 | m, r) da_2 \quad (32)$$

Dado que el producto $c_{S_a}(u, v | m, r) f_{S_{a2}}(a_2 | m, r)$ en la ecuación 32 representa la densidad de probabilidad de S_{a2} dado $S_{a1}, M = m$, y $R = r$, el término $\bar{P}_{S_{a2}}(\gamma_{max} > z | a_1; m, r)$ se puede interpretar entonces como el valor medio de la probabilidad de excedencia con respecto de S_{a2} , condicional a S_{a1} , para cada par de valores m, r . Este término permite que en el análisis se incorpore: (1) el efecto del patrón de dependencia estadística entre S_{a1} y S_{a2} en la caracterización de la respuesta no-lineal; y (2) la variación de dicho patrón de dependencia con las diferentes combinaciones de valores de M y R . En cambio, el término $P(\gamma_{max} > z | a_1)$ en la formulación univariada sólo caracteriza la dependencia de la respuesta con respecto a S_{a1} . En el caso de este ejemplo, se muestra que dichas diferencias son significativas. Desde luego, en caso de que la respuesta estructural dependiera ligeramente de la segunda aceleración espectral, los resultados de ambas formulaciones serían similares. Esto ocurre en general cuando el modo fundamental gobierna la respuesta no-lineal de la estructura.

Los resultados del ejemplo de aplicación muestran que considerar una medida de intensidad escalar puede resultar en estimaciones de la tasa de excedencia de la respuesta considerablemente distintas de las que se obtienen cuando la respuesta se caracteriza apropiadamente, según sea el caso, en función de un conjunto de medidas de intensidad. Una mejor estimación de la tasa de excedencia de la respuesta estructural impacta a su vez en una mejor estimación del riesgo sísmico. En consecuencia, el empleo de la formulación multivariada para el análisis de demanda sísmica puede mejorar las decisiones de diseño, evaluación, reparación o reforzamiento, con base en una mejor estimación de pérdidas esperadas adoptando el enfoque del análisis basado en desempeño del Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEERC).

CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación multivariada para el análisis probabilístico de peligro sísmico de medidas de intensidad vectoriales empleando cópulas. La formulación es una generalización de la propuesta por Bazurro (1998) pues expresa la tasa de excedencia en forma genérica en términos de la cópula de una medida de intensidad vectorial, sin suponer que ésta tiene un tipo de distribución de probabilidad conjunta en particular. En lugar de suponer a priori una cierta estructura de dependencia y estimar los parámetros que la caracterizan, por ejemplo, el coeficiente de correlación lineal en el caso gaussiano, este enfoque permite estimar la cópula que represente apropiadamente el patrón de dependencia entre las variables y, en conjunto con las distribuciones marginales, definir el modelo de distribución de probabilidad multivariada. La

formulación propuesta se aplicó a un ejemplo de análisis de la tasa de excedencia de la distorsión máxima de entrepiso usando el modelo de regresión de Bazzurro y Cornell (2002) para un edificio de acero de 20 niveles. Se consideró una medida de intensidad vectorial compuesta por las aceleraciones espectrales para los dos primeros periodos modales de la estructura. El modelo de cópula del vector de aceleraciones espectrales se estimó usando datos de registros sísmicos de la zona de transición de la Ciudad de México. Este tipo de excitación genera una contribución importante de la respuesta asociada con el segundo modo de la estructura. Los parámetros del modelo de distribución de probabilidad marginal de las aceleraciones espectrales se obtuvieron con base en la ley de atenuación espectral de Reyes *et al.* (2002) para suelo firme y el empleo de cocientes espectrales. Empleando la formulación multivariada se estimaron valores de la tasa de excedencia de la distorsión de entrepiso máxima que son significativamente menores que los obtenidos mediante un análisis univariado usando como medida de intensidad escalar la aceleración espectral del modo fundamental. La tasa de excedencia calculada con el análisis univariado fue del orden de tres a cuatro veces mayor que la tasa obtenida con la formulación multivariada para distorsiones máximas entre 0.01 y 0.02; para distorsiones mayores, la diferencia entre las tasas se incrementa aún más. Estos resultados ilustran que, tal como ha sido documentado en otros estudios sobre análisis probabilista de demanda sísmica, el uso de una medida de intensidad escalar para el cálculo de la tasa de excedencia de la respuesta estructural no resulta ser apropiado en el caso de estructuras cuya respuesta está correlacionada con varias medidas de intensidad; por ejemplo, estructuras cuyo comportamiento depende de la contribución de modos superiores o de múltiples componentes y parámetros del movimiento sísmico del suelo. El análisis multivariado de peligro sísmico permite considerar la distribución de probabilidad conjunta del vector de medidas de intensidad, a diferencia de una formulación univariada en donde cada medida de intensidad escalar es considerada por separado sin tomar en cuenta su dependencia estadística con las demás.

Dos aspectos del ejemplo de análisis multivariado son relevantes a destacar en comparación con un análisis univariado. En primer lugar, comparando las desviaciones estándar de los modelos de regresión para la distorsión máxima de entrepiso, se observa que la incertidumbre en la predicción de la respuesta es menor al considerar las aceleraciones espectrales asociadas a los dos primeros modos que cuando ésta se expresa sólo en términos de la aceleración espectral para el modo fundamental (Shome y Cornell, 1999; Bazzurro y Cornell, 2002). De acuerdo con la definición de eficiencia de una medida de intensidad planteada por Luco y Cornell (2007), el empleo del modelo bivariado es más eficiente en el sentido de que una menor cantidad de registros y análisis estructurales serían necesarios para caracterizar con una adecuada precisión la respuesta en comparación con el caso univariado. En segundo lugar, el análisis bivariado incorpora explícitamente el efecto del patrón de dependencia entre las aceleraciones espectrales en el análisis de demanda sísmica, empleando el modelo de regresión de Bazzurro y Cornell (1999) que se basa en análisis no lineales, así como la variación de dicho patrón de dependencia con la magnitud M y la distancia R del sitio a la fuente. Incorporar dichos efectos a través de un enfoque univariado puede resultar en un procedimiento complejo e impráctico. Una opción sería realizar el análisis probabilista de demanda sísmica empleando modelos de medidas de intensidad escalares expresados como combinaciones de un conjunto de medidas de intensidad que caractericen la respuesta en diferentes periodos modales (Luco y Cornell, 2007). La construcción de dichos modelos es un intrincado procedimiento que requiere caracterizar apropiadamente no sólo la contribución de modos superiores a la respuesta no lineal de interés, sino también la relación entre los estimados de la respuesta considerando varios modos de vibrar y considerando solo el modo fundamental. La formulación que aquí se ha presentado establece un procedimiento explícito y riguroso para un análisis multivariado, evitando el empleo de procedimientos que intentan caracterizar formas espectrales e incorporar la contribución de los modos superiores en función de la respuesta del modo fundamental.

El cálculo de la tasa de excedencia de las medidas de intensidad en el análisis de peligro sísmico y de la tasa de excedencia de un parámetro de respuesta en el análisis probabilista de demanda sísmica, son dos de los pasos fundamentales para el análisis de riesgo sísmico de acuerdo con el marco metodológico del

análisis sísmico basado en desempeño propuesto por el Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEERC). Los resultados del ejemplo de aplicación muestran que, en ciertos casos, el empleo de una formulación univariada considerando una medida de intensidad escalar puede resultar en estimaciones de la tasa de excedencia de la respuesta considerablemente distintas de las que se obtienen cuando la respuesta se caracteriza de manera más eficiente mediante un conjunto de medidas de intensidad. En tales casos, las decisiones de diseño, evaluación, reparación o reforzamiento, dirigidas a mitigar el riesgo sísmico y alcanzar niveles apropiados de confiabilidad, debieran estar basada en los resultados de un enfoque de análisis multivariado. Algunos tópicos que no han formado parte del alcance de este trabajo pueden ser abordados en estudios futuros. Trabajos futuros pueden enfocarse a la caracterización multivariada de peligro sísmico para el análisis probabilista de demanda sísmica de edificios altos de concreto reforzado y de obras de infraestructura como puentes, taludes y plataformas marinas, al estudio de la influencia del componente vertical del movimiento sísmico en la tasa de excedencia de la respuesta, y al análisis de construcciones sometidas a efectos direccionales de movimientos sísmicos de fuentes cercanas. La estimación de los parámetros de las cópulas depende, como en cualquier problema de inferencia estadística, del tamaño de la muestra de datos. Dado que se pueden calcular intervalos de confianza de los parámetros estimados, en estudios futuros se puede evaluar el efecto de la incertidumbre de la estimación estadística de las cópulas en la evaluación de la tasa de excedencia de la respuesta.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM (DGAPA) y a su Programa de Apoyos para la Superación del Personal Académico (PASPA), el apoyo brindado para la elaboración del proyecto de investigación “Formulación multivariada para análisis de peligro sísmico usando cópulas”, durante la estancia sabática del primer autor en el Instituto Mexicano del Petróleo. Se agradece igualmente al Instituto Mexicano del Petróleo su apoyo como institución huésped para la realización de dicha estancia. Los autores agradecen también a los revisores del manuscrito, cuyos comentarios fueron de utilidad en la elaboración de este artículo.

APÉNDICE A

A.1 Estadístico para prueba de bondad basado en la cópula empírica

Suponiendo que el modelo de cópula desconocido de un vector \mathbf{X} de variables aleatorias pertenece a una familia $\mathcal{C}_0 = \{C_\theta: \theta \in \mathcal{O}\}$, donde \mathcal{O} es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^p para un entero $p \geq 1$. La hipótesis nula se plantea como $H_0: C \in \mathcal{C}_0$. Sea C_{θ_n} la cópula con un parámetro estimado θ_n y definiendo el siguiente proceso empírico,

$$\mathbb{C}_n = \sqrt{n}(C_n - C_{\theta_n}) \quad (\text{A.1})$$

en donde C_n es la cópula empírica,

$$C_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(s_{i1} \leq u_1, \dots, s_{id} \leq u_d) \quad (\text{A.2})$$

$s_{ij} = r_{ij}/(n + 1)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, d$, son las pseudo-observaciones, r_{ij} son los rangos de los datos en la muestra, y $\mathbf{1}(A)$ denota la función indicadora del conjunto A . La versión basada en rangos del estadístico de Cramér-Von Mises está dada por (Genest *et al.*, 2009),

$$S_n = \int_{[0,1]^d} \mathbb{C}_n(\mathbf{u})^2 d\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) \quad (\text{A.3})$$

Valores pequeños de dicho estadístico se traducen en valores p grandes y por lo tanto conducen a que no se rechace la hipótesis nula.

A.2 Estadístico basado en la transformación de Rosenblatt

Sea $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \dots, E_d)$ un vector obtenido con base en la transformación de Rosenblatt $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_d)$ de un vector \mathbf{X} de variables aleatorias, como sigue:

$$E_j = \Phi(Z_j), \quad j = 1, \dots, d \quad (\text{A.4})$$

El vector \mathbf{E} define un conjunto de variables independientes y uniformemente distribuidas, por lo que la cópula de dicho vector es la cópula independiente $\Pi(\mathbf{u}) = \prod_1^n u_i$. Si se cuenta con una muestra aleatoria de \mathbf{X} , $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})$, $i = 1, \dots, n$, los valores correspondientes de $\mathbf{e}_i = (e_{i1}, \dots, e_{id})$, $i = 1, \dots, n$, bajo una hipótesis nula H_0 , pueden considerarse entonces que pertenecen a una muestra aleatoria con cópula independiente. Considerando la siguiente distribución empírica,

$$D_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}(\mathbf{e}_i \leq \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in [0,1]^d \quad (\text{A.5})$$

Bajo la hipótesis nula, dicha distribución debería aproximarse a una cópula independiente. El estadístico de tipo Cramér-von Mises para la prueba de hipótesis, se define en este caso como (Genest *et al.*, 2009),

$$\begin{aligned} S_n^{(B)} &= n \int_{[0,1]^d} \{D_n(\mathbf{u}) - \Pi(\mathbf{u})\}^2 d(\mathbf{u}) \\ &= \frac{n}{3^d} - \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^d (1 - e_{ik}^2) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^d (1 - \max(e_{ik}, e_{jk})) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Valores pequeños del estadístico producen valores p grandes y conducen en consecuencia a que no se rechace la hipótesis nula.

A.3 Criterios basados en teoría de la información para selección de cópulas

Los criterios de selección están basados en la función de verosimilitud y consideran el número de parámetros de la cópula que se requieren estimar. Si $\mathbf{s}_i = \{s_{ij}, j = 1, \dots, d\}, i = 1, \dots, n$, denota las pseudo-observaciones en una muestra de tamaño n y θ_n son los estimados de los parámetros de la cópula, las expresiones para el cálculo del criterio de Akaike y el Bayesiano son (Akaike, 1973; Schwarz, 1978),

$$AIC: = -2 \sum_{i=1}^n \ln[c_{\theta_n}(\mathbf{s}_i)] + 2k \quad (A.7)$$

$$BIC: = -2 \sum_{i=1}^n \ln[c_{\theta_n}(\mathbf{s}_i)] + \ln(n)k \quad (A.8)$$

donde, k es el número de parámetros de la cópula. El procedimiento consiste en seleccionar entre un grupo de modelos candidatos, aquel para el cual las expresiones de los criterios en las ecuaciones A.7 y A.8 resultan en un menor valor.

REFERENCIAS

- Akaike, H (1973), "Information theory and an extension of the maximum likelihood principle", In: *Proceedings of the second international symposium on information theory*, p. 267–81. DOI: [10.1007/978-1-4612-1694-0_15](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1694-0_15)
- Baker, J (2007), "Probabilistic structural response assessment using vector-valued intensity measures", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 36, 1861-1883. DOI: [10.1002/eqe.700](https://doi.org/10.1002/eqe.700)
- Baker, J y C A Cornell (2005), "A vector-valued ground motion intensity measure consisting of spectral acceleration and epsilon", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 34, 1193–1217. DOI: [10.1002/eqe.474](https://doi.org/10.1002/eqe.474)
- Baker, J W y N Jayaram (2008), "Correlation of spectral acceleration value from NGA ground motion models", *Earthquake Spectra*, Volume 24, No. 1, 299-317. DOI: [10.1193/1.2857544](https://doi.org/10.1193/1.2857544)
- Barbosa, A R (2011), "Simplified vector-valued probabilistic seismic hazard analysis and probabilistic seismic demand analysis: application to the 13-th story NEHRP reinforced concrete frame-wall building design example", *Ph.D Dissertation*, University of California, San Diego.
- Bazzurro, P (1998), "Probabilistic seismic demand analysis", *Ph.D Dissertation*, Stanford University.
- Bazzurro, P y C A Cornell (2002), "Vector-Valued probabilistic seismic hazard analysis (VPSHA)", *Proceedings, 7th U. S. National Conference on Earthquake Engineering*, Boston, USA.
- Bazzurro, P, P Tothong y J Park (2009), "Efficient approach to vector-valued probabilistic seismic hazard analysis of multiple correlated ground motion parameters", *10th Intl. Conf. on Structural Safety and Reliability (ICOSSAR09)*, Osaka, Japan.
- CFE (2015), *Manual de Obras Civiles. Diseño por Sismo*, Comisión Federal de Electricidad. Instituto de Investigaciones Eléctricas.

- Conte, J P y Y Zhang (2007), “Performance based earthquake engineering: application to an actual bridge-foundation-ground system”, *12th Italian National Conf. on Earthquake Engineering*, Pisa, Italy.
- Cornell, C A (1968), “Engineering seismic risk analysis”, *Bull Seismol Soc Am*, 1968, 58:1583–606. DOI: [10.1785/BSSA0580051583](https://doi.org/10.1785/BSSA0580051583)
- Cornell, C A y E Vanmarcke (1969), “The mayor influences on seismic risk”, *Proc., 4th WCEE*, Santiago de Chile, vol. I, A-1, 69-83.
- Embrechts, P, A J McNeil y D Straumann (2002), “Correlation and dependency in risk management: properties and pitfalls”, In: Dempster M, editor. *Risk management: value at risk and beyond*. Cambridge University Press; p. 176–223.
- Esteva, L (1967), “Criteria for the construction of spectra for seismic design”, *3rd Panam. Symp. Struct.*, Caracas, Venezuela.
- Faggella, M, A R Barbosa, J P Conte, E Spacone y J I Restrepo (2013), “Probabilistic seismic response analysis of a 3-D reinforced concrete building”, *Structural Safety*, 44, 11-27. DOI: [10.1016/j.strusafe.2013.04.002](https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2013.04.002)
- Genest, C y A C Favre (2007), “Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask”, *Journal of Hydrologic Engineering*, ASCE, 12:4, 347-368. DOI: [10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(2007\)12:4\(347\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(347))
- Genest, C, B Rémillard y D Beaudoin (2009), “Goodness-of-fit tests for copulas: a review and a power study”, *Insur: Math Econ*. 44, 199–213. DOI: [10.1016/j.insmatheco.2007.10.005](https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.10.005)
- Goda, K y S Tesfamariam (2015), “Multi-variate seismic demand modelling using copulas: Application to non-ductilite reinforced concrete frame in Victoria, Canada”, *Structural Safety*, 56, 39-51. DOI: [10.1016/j.strusafe.2015.05.004](https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2015.05.004)
- Gupta, A y H Krawinkler (1999), *Seismic demands for performance evaluation of steel moment resisting frame structures*, Earthquake Engineering Center Blume, Department of civil and Environmental Engineering Stanford University, Report No.132.
- Gutenberg, B y C F Richter (1944), “Frequency of earthquake in California”, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 46, 105-145.
- Hofert, M, I Kojadinovic, M Maechler, J Yan, J Neslehova y R Morger (2020), “Multivariate dependence with copulas”, *R package Copula*, version 1.0-1. URL: <http://copula.r-forge.r-project.org>
- Jayaram, N, J W Baker, H Okano, H Ishida, M W Jr McCann y Y Mihara (2011), “Correlation of response spectra values in Japanese ground motions”, *Earthquake and Structures*, 2(4), 357-376. DOI: [10.12989/eas.2011.2.4.357](https://doi.org/10.12989/eas.2011.2.4.357)
- Joyner, W B y D M Boore (1988), “Measurement, characterization, and prediction of strong ground motion”, *Proceedings Earthquake Engineering and Soil Dynamics*, II GT Div./ASCE, Park City, Utah, pp. 43-101.
- Kohrangi, M, P Bazzurro y D Vamvatsikos (2016), “Vector and scalar IMs in structural response estimation, Part I: Hazard analysis”, *Earthquake Spectra*, 32, No. 3, 1507–1524. DOI: [10.1193/053115EQS080M](https://doi.org/10.1193/053115EQS080M)
- Lebrun, R y A Dutfoy (2009), “Do Rosenblatt and Nataf isoprobabilistic transformations really differ?”, *Probab Eng Mech*, 24:577–84. DOI: [10.1016/j.probangmech.2009.04.006](https://doi.org/10.1016/j.probangmech.2009.04.006)
- Luco, N y A Cornell (2007), “Structure-specific scalar intensity measures for near-source and ordinary earthquake ground motions”, *Earthquake Spectra*, 23, 357-392. DOI: [10.1193/1.2723158](https://doi.org/10.1193/1.2723158)

- Moehle, J y G Deierlein (2004), “A framework methodology for performance-based earthquake engineering”, *13th World Conf. on Earthquake Engineering*, Vancouver, Canada, Paper No. 679.
- Montes-Iturrizaga, R y E Heredia-Zavoni (2015), “Environmental contours using copulas”, *Applied Ocean Research*, 52, 125-139. DOI: [10.1016/j.apor.2015.05.007](https://doi.org/10.1016/j.apor.2015.05.007)
- Montes-Iturrizaga, R y E Heredia-Zavoni (2016), “Multivariate environmental contours using C-vine copulas”, *Ocean Engineering*, 118, 68-82. DOI: [10.1016/j.oceaneng.2016.03.011](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.03.011)
- Montes-Iturrizaga, R y E Heredia-Zavoni (2017), “Assessment of uncertainty in environmental contours due to parametric uncertainty in models of the dependence structure between metocean variables”, *Applied Ocean Research*, 64, 86-104. DOI: [10.1016/j.apor.2017.02.006](https://doi.org/10.1016/j.apor.2017.02.006)
- Nelsen, R B (2006), *An introduction to copulas*, 2nd ed. New York: Springer.
- R Core Team (2020), “R: A language and environment for statistical computing”, *R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- Rajeev, P, P Franchin y P E Pinto (2008), “Increased accuracy of vector-IM-based seismic risk assessment?”, *Journal of Earthquake Engineering*, 12(S1), 111-124. DOI: [10.1080/13632460801925798](https://doi.org/10.1080/13632460801925798)
- Reyes, C, E Miranda, M Ordaz y R Meli (2002), “Estimación de espectros de aceleraciones correspondientes a diferentes periodos de retorno para las distintas zonas sísmicas de la Ciudad de México”, *Revista de Ingeniería Sísmica*, No. 66, 95-121. DOI: [10.18867/ris.66.198](https://doi.org/10.18867/ris.66.198)
- Rosenblueth, E y A Arciniega (1992), “Response spectral ratios”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 21, pp 483-492. DOI: [10.1002/eqe.4290210603](https://doi.org/10.1002/eqe.4290210603)
- Salvadori, G, C De Michele, N T Kottegoda y R Rosso (2007), *Extremes in nature. An Approach Using Copulas*, Springer.
- Schwarz, G (1978), “Estimating the dimension of a model”, *Ann Statist*, 6(2) :461–464. DOI: [10.1214/aos/1176344136](https://doi.org/10.1214/aos/1176344136)
- Shome, N (1999), “Probabilistic seismic demand analysis of nonlinear structures”, *Ph.D Dissertation*, Stanford University.
- Shome, N y C A Cornell (1999), *Probabilistic Seismic Demand Analysis of Nonlinear Structures*, Report No. RMS-35, Department of civil and Environmental Engineering, Reliability of Marine Structures Program, Stanford University.
- Sklar, A (1959), *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publ. Inst. Stat. Univ. Paris, 8, 229–231.
- Tang, X-S, D-Q Li, C-B Zhou y L-M Zhang (2013a), “Bivariate distribution models using copulas for reliability analysis”, *J Risk Reliab*, 227(5):499–512. DOI: [10.1177/1748006X13481928](https://doi.org/10.1177/1748006X13481928)
- Tang, X-S, D-Q Li, C-B Zhou, K-K Phoon y L-M Zhang (2013b), “Impact of copulas for modeling bivariate distributions on system reliability”, *Struct Saf*, 44:80–90. DOI: [10.1016/j.strusafe.2013.06.004](https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2013.06.004)