

# EL FAM, UNA ALTERNATIVA DE ANÁLISIS DINÁMICO NO LINEAL

Carlos Mauricio Patlán Manjarrez <sup>(1)</sup> y Hugo Hernández-Barrios <sup>(2)</sup>

## RESUMEN

El Método de Analogía de la Fuerza, FAM, (Force Analogy Method) es una herramienta innovadora que permite realizar el análisis estático y dinámico de una estructura considerando la no linealidad del material. El FAM puede usarse considerando historias de tiempo aplicadas en la base o en la masa de cualquier sistema; el FAM es una herramienta que permite hacer análisis con precisión y rapidez, con una gran eficiencia computacional. La metodología puede emplearse en sistemas con control pasivo y activo, además de considerar modelos de comportamiento a flexión, carga axial, cortante y efectos no lineales debido a la geometría del elemento. En este artículo, se presenta en detalle el FAM, proporcionando sus bases teóricas y una guía para su implantación práctica. Se muestran ejemplos prácticos que abarcan desde sistemas de un grado de libertad hasta estructuras de varios niveles, considerando no linealidad debida a la flexión utilizando el modelo bilineal. Los resultados se comparan con los obtenidos por los métodos tradicionales de análisis, obteniéndose resultados similares.

**Palabras clave:** Método de Analogía de la Fuerza; Análisis no lineal; bilineal

## THE FAM, AN ANTERNATIVE FOR NONLINEAR DYNAMIC ANALYSIS

### ABSTRACT

The Force Analogy Method, FAM, (Force Analogy Method) is an innovative tool that allows static and dynamic analysis of a structure to be performed considering material non-linearity. The FAM can be used considering time histories applied in the base or in the mass of any system; the FAM is a tool that allows analysis to be performed accurately and quickly, with great computational efficiency. The methodology can be used in systems with passive and active control, in addition to considering bending, axial load, shear models of behavior and non-linear effects due to the geometry of the element. In this article, the FAM is presented in detail, providing its theoretical bases and a guide for its practical implementation. Practical examples are shown ranging from single degree of freedom systems to multi-level structures, considering non-linearity due to bending using the bilinear model. The results are compared with those obtained by traditional analysis methods, obtaining similar results.

**Keywords:** Force Analogy Method; non-linear analysis; bilinear

---

Artículo recibido el 03 de enero de 2024 y aprobado para su publicación el 21 de enero de 2025. Se aceptarán comentarios y/o discusiones hasta cinco meses después de su publicación.

<sup>(1)</sup> Programa de Maestría y Doctorado de la UNAM, Av. Universidad, No. 3000, CP 04510, Del. Coyoacán, México D.F. [cmpmanjarrez@gmail.com](mailto:cmpmanjarrez@gmail.com)

<sup>(2)</sup> Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Francisco J. Múgica S/N, Ciudad Universitaria, Morelia, Michoacán, México, C.P. 58040. [hugo.hernandez@umich.mx](mailto:hugo.hernandez@umich.mx)

## INTRODUCCIÓN

Actualmente, aún es común que el diseño estructural ante cargas sísmicas y eólicas se realice considerando un comportamiento elástico del material, sin embargo, el material de las estructuras que están sujetas a cargas dinámicas severas puede exhibir un comportamiento inelástico, por lo que la tendencia es que sea más común la necesidad de realizar un análisis dinámico inelástico durante el proceso de diseño. Debido a su complejidad, el desarrollo de las metodologías para realizar un análisis dinámico inelástico ha sido un tema relacionado con el desarrollo de los métodos numéricos y la evolución de los sistemas de cómputo. En las últimas cuatro décadas, el Método del Elemento Finito (MEF) ha asumido el liderazgo de este tipo de análisis (Zienkiewicz y Taylor, 2005), seguido por el Método de Elementos de Frontera (MEB), (Hatzigeorgio y Beskos, 2011). Históricamente, el análisis inelástico de estructuras de concreto se inició en la década de 1960, con los trabajos de Clough, Benuska y Wilson (1965), Aoyama y Sugano (1968), Chanjes (1968), Gilbertson (1969), Alvarez y Brimtiel (1969), entre otros.

Con respecto a los algoritmos de integración de la ecuación de movimiento, la metodología más popular es integrar la matriz de rigidez la cual cambia en cada incremento de tiempo, tal que, los métodos comúnmente empleados son el de  $\beta$ -Newmark y el de  $\theta$ -Wilson. En esos métodos convencionales, el problema principal durante el cálculo es lograr la convergencia, una vez que la estructura incursiona en el intervalo de fluencia o de deformación no lineal. Como resultado del proceso iterativo de convergencia, se incrementa la demanda computacional, lo que se traduce en tiempos de análisis prolongados.

El Método de la Analogía de la Fuerza, FAM, (Force Analogy Method) es un algoritmo relativamente nuevo, que fue desarrollado en 1999 por Wong y Yang (1999) para resolver problemas de análisis dinámico considerando no linealidad en el comportamiento del material, y en el cual la matriz de rigidez sólo se calcula una vez durante la etapa inicial del proceso, lo que simplifica grandemente el proceso de cálculo numérico y hace posible su aplicación práctica. El FAM utiliza el concepto de desplazamiento inelástico, comúnmente conocido como desplazamiento residual, y una formulación matemática en donde la no linealidad del material está representada por un cambio en los desplazamientos, en lugar de un cambio en la rigidez. El concepto original del FAM fue introducido por Lin en 1960, quién lo aplicó al cálculo de esfuerzos-deformación en Mecánica del Continuo, considerando el material con un comportamiento inelástico definido por las deformaciones plásticas. Debido a que se presentó en la misma época en la que se iniciaba el estudio por medio del MEF, no fue ampliamente difundido.

Wong y Yang (2000), propusieron el FAM como una alternativa para desarrollar el control híbrido, combinando actuadores activos y amortiguadores viscosos. La incorporación de estos dispositivos se logra mediante la modificación explícita de la ecuación de movimiento, donde las fuerzas de control se introducen como fuerzas externas dependientes del tiempo. Para resolver la ecuación, se emplea la formulación variable estado, lo que permite su solución mediante integración directa utilizando funciones Delta. Esta metodología fue aplicada específicamente para cargas sísmicas en las estructuras. Los mismos autores lo aplicaron en sistemas de control y optimización de sistemas de control (Wong y Yang, 2001a; 2001b), así como, propusieron índices de daño estructural considerando la energía de disipada durante la formación de las articulaciones plásticas (Wong y Wang, 2001).

En el 2003, Wong y Wang modificaron la teoría desarrollada por ellos, ya que inicialmente no era posible aplicarse en estructuras reales, ya que durante el proceso numérico se desarrollaba una matriz de masa que debería ser positiva definida, lo cual no siempre sucedía durante el análisis de estructuras reales. En dicho trabajo se plantea modificar el FAM utilizando condensación estática, lo que reduce el tiempo de cómputo y hace posible su aplicación a cualquier estructura. Usando las modificaciones del FAM, se plantean algoritmos de control óptimo de estructuras (Wong, Yang, 2003; Yang, Wong y Pan, 2004; Wong y Zhao, 2005a; 2005b) y para estructuras con control activo (Wong y Pang, 2007).

Zhao y Wong (2006) incorporaron en la ecuación de movimiento el concepto de desplazamientos inelásticos, además de la posibilidad de tomar en cuenta los efectos geométricos no lineales de un elemento, para el cálculo de la respuesta dinámica no lineal de un marco plano con comportamiento inelástico, separando estratégicamente el acoplamiento entre la no linealidad del material y la no linealidad geométrica, y demostrando la eficacia del FAM al compararlo con los métodos tradicionales empleados en los programas de cálculo comerciales.

Chao y Loh (2007) propusieron una nueva versión del FAM, a la que denominaron Método de la Analogía de la Fuerza Modificado (MFAM), en el que se modifica la rigidez tangente del elemento en lugar de los desplazamientos inelásticos. Propusieron un elemento-viga-columna, que puede controlar el comportamiento a flexión y a cortante, además de los efectos P- $\Delta$ . Dicha teoría fue aplicada a elementos de concreto reforzado, ya que, hasta esa época solo se consideraba el elemento con comportamiento bilineal.

Zhang, Wong y Wang (2007) proponen un índice de daño basado en FAM, considerando tanto la máxima deformación y el daño acumulado, el índice propuesto puede ser empleado en diferentes niveles de comportamiento, local, global y modal en estructuras de acero estructuradas a momento resistente.

La aplicación del FAM en marcos de acero sometidos a momento, se diversificó al agregar a la matriz del elemento zonas rígidas en sus extremos para modelar el nodo (Wong y Wang, 2007a) y placas de acero en los nodos como zonas de disipación de energía (Wong y Wang, 2007b), en ambos trabajos sólo se aplicó el método a un marco plano de un nivel y una crujía. Wong y Zhao (2007) desacoplan los efectos inelásticos del material de los efectos de la no linealidad geométrica, aplicando el concepto de desplazamientos inelásticos y la matriz de rigidez geométrica. En su mayoría, los ejemplos de aplicación que se encuentran en la literatura son para sistemas de un grado de libertad o en marcos planos de acero.

En 2008 el FAM (Wong, 2008) se aplicó en sistemas estructurales simples con control pasivo por medio de un dispositivo de masas sintonizadas, TMD, (Tuned Mass Damper); en los marcos de acero utilizados como ejemplos, los elementos se consideraron con comportamiento elastoplástico, despreciando los efectos de interacción momento flexionante-carga axial en las columnas. El trabajo se extendió considerando múltiples masas sintonizadas por Wong y Johnson (2009) y para el cálculo de curvas de fragilidad por Wong y Harris (2012).

Wong y Harris (2010) compararon los resultados de un análisis dinámico no lineal por superposición modal mediante el FAM con los obtenidos con el software Perform-3D, encontrando que la descomposición modal mediante el FAM aproxima con gran precisión la respuesta dinámica obtenida en el programa Perform utilizando únicamente tres formas modales y siendo hasta 20 veces más rápido. Para el caso de control con amortiguadores viscosos no lineales Wong (2011) aplicó el FAM en un marco de acero con comportamiento elastoplástico. El FAM combinado con amortiguadores magnetoreológicos fue aplicado por Li, Liu y Li (2011); en Li y Li (2011) aplican el FAM con dispositivos disipadores de energía en marcos de acero.

Li *et al.* (2012) utilizó el FAM en marcos de acero en 2D y con un nivel, con contraventeo concéntrico, sometidos a un evento sísmico. El macro modelo de Linde y Bachmann (1994) para elementos muro a cortante, fue adaptado por Li, *et al.* (2015) y en Li y Wong (2014) para considerar muros de concreto reforzado en el comportamiento sísmico inelástico de marcos planos de un nivel.

Para el caso de elementos de concreto reforzado considerando degradación de la rigidez y de la resistencia, no linealidad geométrica y la falla estructural del elemento por medio de la formación de articulaciones fue propuesto en Li, Zhang y Li (2014a). Posteriormente, los mismos autores (2015) aplicaron del FAM en el análisis sísmico bidireccional en pilas de un puente, el cual fue aplicado por medio del

desarrollo de mecanismos plásticos biaxiales, una articulación a rotación y otra al deslizamiento, incluyendo degradación de la rigidez, deterioro, efectos de “pinching”, y particularmente efectos de interacción flexión-cortante. El método de superposición modal para estimar la respuesta no lineal de sistemas de múltiples grados de libertad, basados en el FAM fue propuesto por Li, Li y Zhang (2015).

La formulación del FAM para realizar análisis estáticos incrementales junto con un modelo que representa el comportamiento monotónico no lineal de pilas de concreto en puentes, incluyendo los efectos de endurecimiento y ablandamiento debido a la fuerza, así como el efecto de la corrosión por iones cloruro, se incorporaron en un mecanismo de plasticidad local por medio de un modelo de deterioro para las propiedades mecánicas del acero de refuerzo, además se incorporaron los efectos geométricos no lineales por medio de funciones de estabilidad. En 2015 Wong y Speicher, introdujeron las funciones de estabilidad para considerar los efectos geométricos no lineales y el FAM. Con lo anterior Zhang, Li y Li (2016) propusieron una metodología para el comportamiento sísmico de puentes carreteros ubicados en zonas de alta agresividad ambiental para definir su ciclo de vida, para ello emplearon el método estático incremental.

Se verificó la influencia de dos formas diferentes para realizar la condensación estática en un análisis inelástico empleando el FAM, el modelo completo de condensación estática y el modelo reducido de condensación estática, en marcos planos de acero con amortiguamiento tipo Rayleigh y comportamiento no lineal de una estructura sometida a un evento sísmico (Bahar y Bahar, 2017). Toloue *et al.* (2018) aplican el control activo de vibraciones combinado el FAM con elementos viga Euler y Timoshenko, para análisis elásticos e inelásticos de marcos planos equipados con actuadores lineales diseñados por medio de un Regulador Cuadrático Linear (LQR). El FAM también fue empleado en la evaluación de los resultados de pruebas experimentales en marcos planos de acero de aluminio sometidos a cargas semi armónicas producidas por una mesa vibradora (Toloue *et al.*, 2020).

Safaei, Taslimi, Tehrani (2018) comprobaron la exactitud del FAM en la realización de análisis estáticos incrementales, en varios marcos de acero con diferentes configuraciones, comparan los resultados con los obtenidos con el software SAP2000 y con OpenSees. Es importante señalar que, si bien el software SAP2000 no realiza análisis inelásticos no lineales de manera completa, se ha empleado como referencia para validar de forma aproximada los resultados obtenidos con el FAM. En el trabajo de Safaei, Taslimi, Tehrani (2018) se obtuvo una diferencia menor al 5% en el cortante basal. Para un análisis inelástico no lineal más riguroso, OpenSees fue utilizado como herramienta adicional de validación, encontrando que la diferencia fue a lo sumo 8% utilizando elementos tipo Beam-Column basados en desplazamientos.

Nica, Calofir y Coraci (2018); Calofir, *et al.*, (2019, 2020) y Munteanu *et al.* (2020) combinan el FAM con un integrador explícito junto con un amortiguador no lineal para considerar el impacto debido al choque entre edificios sometidos a cargas sísmicas, los edificios considerados son marcos planos de acero.

Combinando el FAM y las ecuaciones de balance de energía, Wang, Wu y Wang (2019), definieron un índice de daño basado en las deformaciones plásticas acumuladas y la energía disipada de forma plástica; las cuales se relacionan con el daño estructural que producen un evento sísmico.

Ningthoukhongjam y Singh (2020a, 2020b, 2021) por medio del FAM desarrollaron análisis dinámicos no lineales en marcos de acero con irregularidad de masa con la altura, y compararon los resultados con los obtenidos con la metodología basada en el Método del Elemento Finito. Concluyendo sobre la ventaja del FAM sobre las técnicas tradicionales de análisis no lineal.

Hasta el año 2021, el FAM sólo había sido aplicado en estructuras en el plano, en Nica *et al.* (2022) se aplicó el FAM para realizar el análisis dinámico no lineal en dos estructuras en 3D de concreto reforzado excitadas sísmicamente, tomando en cuenta la interacción flexión-carga axial, utilizaron el modelo bilineal

con un integrador de Matab/Simulink. Los resultados fueron validados con el software SAP2000. Los resultados del anterior trabajo también fueron reportados en Munteanu *et al.* (2022) sólo agregando el balance de energía y un índice de daño asociado a él. Este balance de energía se calcula a partir de la integración de cada término de la ecuación de movimiento con respecto al cambio en los desplazamientos totales. Durante el análisis no lineal se consideró que la única fuente de no linealidad es producida en las vigas por medio de la rotación, mientras que las deformaciones por cortante y axiales permanecen elásticas. En Iancovici *et al.* (2022), utilizan el índice de daño de Park y Ang, para definir el daño en la estructura en 3D estudiada por Munteanu *et al.* (2022), pero ahora sometida a cargas eólicas debidas a viento obtenidas en pruebas experimentales en un túnel de viento. En Iancovici y Nica (2023), presentan los resultados de análisis dinámicos no lineales ante historias de viento, pero para marcos en 2D.

En este trabajo se muestran las ventajas de emplear el FAM, para realizar un análisis dinámico no lineal de estructuras. Se muestra de manera transparente la secuencia de cálculo que permite su programación en cualquier plataforma numérica. El FAM también puede emplearse para realizar análisis estáticos incrementales, y es posible considerar modelos no lineales de comportamiento de elementos sometidos a flexión, carga axial y cortante, además de la no linealidad geométrica del elemento. Se ha empleado para estructuras con control pasivo y activo de la respuesta dinámica de una estructura ante cargas sísmicas y eólicas.

Como principal contribución en este trabajo se propone un proceso iterativo de fácil implantación en el proceso numérico que agiliza la programación con respecto a la metodología propuesta en las referencias bibliográficas (Li y Wong, 2014), además de la aplicación de la metodología al análisis eólico no lineal de estructuras.

## BASES DE LA METODOLOGÍA

### Conceptos básicos

El principio básico del FAM consiste en considerar cada deformación inelástica como una articulación plástica que suma un grado de libertad más a la estructura, de esta manera la matriz de rigidez sólo debe calcularse al inicio del procedimiento de análisis. Al emplear el FAM, las fuerzas externas producen deformaciones inelásticas en las articulaciones plásticas, las cuales pueden ser alargamiento y pandeo en los contraventeos de una estructura, rotaciones más allá del intervalo elástico en las vigas y/o columnas, fluencia en los aisladores de base, entre otros.

En la Figura 1 se observa el punto A, que corresponde a una fuerza-desplazamiento de fluencia,  $F_y - x_y$ , en esa zona la pendiente de la recta corresponde a la rigidez elástica o inicial,  $k_e$ . Al aplicar una fuerza  $F_s$ , mayor a la fuerza,  $F_y$ , la estructura tendrá un desplazamiento total,  $x$ , definido por el punto C. Al prolongar la pendiente de la zona elástica hasta que alcance la fuerza  $F_s$ , se encuentra el punto B, llamado desplazamiento elástico,  $x'$ .

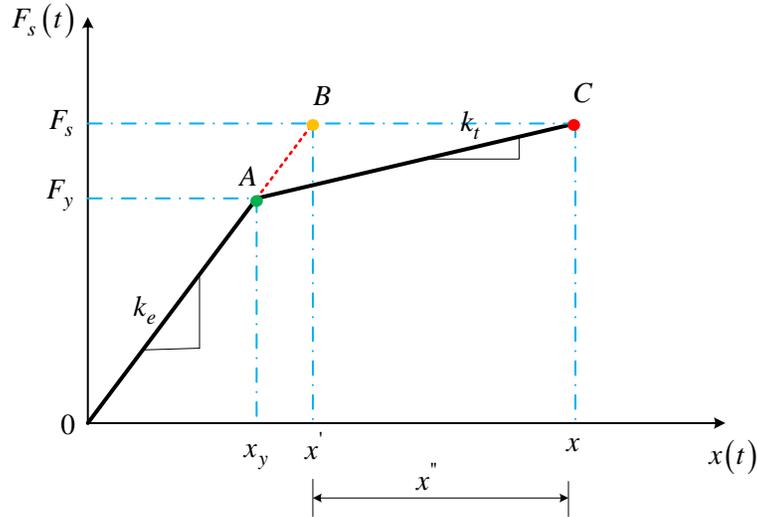


Figura 1. Relación básica de fuerza-desplazamiento usada en el FAM (Wong y Yang, 1999)

El desplazamiento total,  $x$ , de la estructura es la suma del desplazamiento elástico,  $x'$ , y el desplazamiento inelástico,  $x''$ ,

$$x = x' + x'' \quad (1)$$

por lo que el desplazamiento inelástico del sistema,  $x''$  es la diferencia entre el desplazamiento total y el desplazamiento elástico,  $x'$ . La diferencia entre el desplazamiento elástico y el inelástico, es que el primero desaparece al retirar la carga, mientras que el segundo permanece, por esta razón también se conoce como desplazamiento residual.

Para toda fuerza aplicada menor que la fuerza que establece el límite de fluencia,  $F_y$ , los desplazamientos inelásticos son nulos,  $x'' = 0$ , por lo que desplazamientos totales,  $x$ , son iguales a los desplazamientos elásticos,  $x'$ . Se tiene,

$$\begin{aligned} x \leq x_y &\Rightarrow x' = \frac{F_s}{k_e} \Rightarrow x'' = 0 \\ x > x_y &\Rightarrow x' = \frac{F_s}{k_e} \Rightarrow x'' > 0 \end{aligned} \quad (2)$$

La fuerza  $F_s$  para cualquier desplazamiento  $x$  es igual al producto de la rigidez elástica por el desplazamiento elástico, es decir:

$$F_s = k_e (x - x'') \quad (3)$$

La ecuación principal para el análisis no lineal para un sistema de  $n$  grados de libertad está dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}'' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -\Lambda'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$  es un vector que contiene la respuesta en los grados de libertad no restringidos de la estructura;  $n$  es el número de grados de libertad no restringidos,  $\Lambda'' = (\Lambda_1'' \ \Lambda_2'' \ \dots \ \Lambda_q'')^T$  es un vector que contiene la respuesta inelástica en las articulaciones plásticas, en donde  $q$  es el total de articulaciones plásticas;  $\mathbf{F}_e$  es un vector que contiene las fuerzas externas aplicadas en los grados de libertad no restringidos;  $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_q)^T$  es un vector que contiene las acciones (momentos y fuerzas), en las articulaciones plásticas.

Las matrices de rigidez empleadas en el FAM son las siguientes:  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez de los grados de libertad no restringidos;  $\mathbf{K}'$  es la matriz de rigidez que relaciona los desplazamientos de los grados de libertad no restringidos con la respuesta inelástica en las articulaciones plásticas;  $\mathbf{K}''$  es la matriz de rigidez que relaciona la respuesta inelástica en las articulaciones plásticas con las acciones en las articulaciones plásticas.

Las tres matrices son obtenidas como la suma de las matrices elementales para cada elemento que conforma a la estructura relacionadas con su correspondiente grado de libertad y articulación plástica.

Existen dos tipos de articulaciones plásticas: las que corresponden a relaciones momento-rotación y las que corresponden a fuerza-desplazamiento. Para un comportamiento bilineal se utilizan las relaciones momento-rotación, donde la variable  $m$  representa las acciones en las articulaciones plásticas, es decir,  $\mathbf{f} = (m_1, m_2, \dots, m_q)^T$  y la variable  $\theta$  para las reacciones totales en las articulaciones plásticas, es decir,  $\Lambda = (\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_q)^T$ .

Al igual que como se presentó en la ecuación 1, las rotaciones totales están formadas por una parte elástica y una inelástica, es decir,  $\theta = \theta' + \theta''$ . De acuerdo con lo anterior, la respuesta inelástica en las articulaciones plásticas es  $\Lambda'' = (\theta_1'', \theta_2'', \dots, \theta_q'')^T$ .

### Deducción de la matriz de rigidez

Las matrices de cada elemento son función de la matriz de rigidez en el sistema local. En el espacio plano, la matriz de rigidez en el sistema local de una barra,  $\mathbf{k}^{(e)}$ , es

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (5)$$

La matriz que permite la transformación de coordenadas entre el sistema local y el global está dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (6)$$

siendo

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde  $l$  es el coseno del ángulo formado entre el eje longitudinal local de la barra y el eje  $x$  global, y  $m$  es el seno del ángulo formado entre el eje longitudinal local de la barra y el eje  $x$  global.

La matriz de rigidez que relaciona la respuesta inelástica en las articulaciones plásticas con las acciones en las articulaciones plásticas de cada barra,  $\mathbf{K}''^{(e)}$ , se encuentra en el sistema local, por lo tanto

$$\mathbf{K}''^{(e)} = \mathbf{k}^{(e)} \quad (8)$$

Para esta matriz los renglones y columnas representan en el siguiente orden: una articulación axial con relación fuerza-desplazamiento en el nodo inicial o al centro del elemento, una articulación de cortante con relación fuerza-desplazamiento en el nodo inicial o al centro del elemento, una articulación de flexión con relación momento-rotación en el nodo inicial, una articulación axial con relación fuerza-desplazamiento en el nodo final, una articulación de cortante con relación fuerza-desplazamiento en el nodo final, una articulación de flexión con relación momento-rotación en el nodo final. Por ejemplo, si se tiene una estructura donde el comportamiento no lineal esperado está dado en flexión con articulaciones de tipo momento-rotación, se deben usar solo las columnas y renglones 3 y 6 de la matriz presentada en la ecuación 5. Cada articulación plástica considerada en cada barra es un grado de libertad más que es sumado en la matriz global  $\mathbf{K}''$ .

La matriz de rigidez que relaciona los desplazamientos de los grados de libertad no restringidos de la estructura, con la respuesta inelástica en las articulaciones plásticas para cada barra,  $\mathbf{K}'^{(e)}$ , establece el vínculo entre la respuesta de la estructura establecida en el sistema global con las acciones en las articulaciones plásticas dadas en el sistema local, por lo anterior, para cada barra está dada por

$$\mathbf{K}'^{(e)} = \mathbf{R}^T \mathbf{k}^{(e)} \quad (9)$$

Para esta matriz los renglones representan los grados de libertad de la estructura y las columnas representan las articulaciones plásticas dadas en el orden descrito para la matriz  $\mathbf{K}''^{(e)}$ . Las matrices de rigidez de cada barra son sumadas en la matriz global  $\mathbf{K}'$  según el grado de libertad no restringido de la estructura y la articulación plástica correspondiente.

La matriz de rigidez de los grados de libertad no restringidos de la estructura para cada barra,  $\mathbf{K}^{(e)}$ , está dada en el sistema global para que los desplazamientos obtenidos tengan el mismo sistema de referencia, en consecuencia, para cada barra se obtiene mediante

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{R}^T \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{R} \quad (10)$$

Para esta matriz los renglones y las columnas representan los grados de libertad de la estructura. Las matrices de rigidez de cada barra son ensambladas en una matriz global  $\mathbf{K}$  según el grado de libertad no restringido de la estructura.

### Condensación estática

Mediante condensación estática se calcula la respuesta traslacional de interés de la estructura de manera eficiente eliminando los grados de libertad donde no se aplican las fuerzas. La deducción detallada del proceso de condensación estática con el FAM se presenta en Li y Wong (2014). La ecuación fundamental del FAM en forma condensada es

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}} & \bar{\mathbf{K}}' \\ \bar{\mathbf{K}}'^T & \bar{\mathbf{K}}'' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_d \\ -\Lambda'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{f} \end{pmatrix} \quad (11)$$

donde

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{dd} - \mathbf{K}_{dr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rd}, \quad \bar{\mathbf{K}}' = \mathbf{K}'_d - \mathbf{K}_{dr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}'_r, \quad \bar{\mathbf{K}}'' = \mathbf{K}'' - \mathbf{K}'^T_r \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}'_r \quad (12)$$

aquí los elementos que contienen un subíndice  $d$  se asocian a los grados de libertad donde se encuentran aplicadas las fuerzas; y los elementos que contienen un subíndice  $r$  se asocian a los grados de libertad donde no existen fuerzas aplicadas.

### Respuesta dinámica

La ecuación de movimiento es:

$$\mathbf{M}_{dd} \ddot{\mathbf{x}}_d(t) + \mathbf{C}_{dd} \dot{\mathbf{x}}_d(t) + \bar{\mathbf{K}} \mathbf{x}'_d(t) = \mathbf{F}_e(t) \quad (13)$$

donde  $\mathbf{M}_{dd}$  es la matriz de masas de los grados de libertad traslacionales;  $\mathbf{C}_{dd} = a_1 \mathbf{M}_{dd} + a_2 \bar{\mathbf{K}}$  es la matriz de amortiguamiento de los grados de libertad traslacionales usando amortiguamiento proporcional o clásico; y  $\bar{\mathbf{K}}$  es la matriz de rigidez obtenida al llevar a cabo la condensación estática, definida en la ecuación 12.

Si se realiza un análisis sísmico, la función de fuerzas externas es

$$\mathbf{F}_e(t) = -\mathbf{M}_{dd} \ddot{\mathbf{x}}_g(t)$$

y si es un análisis eólico,

$$\mathbf{F}_e(t) = \frac{1}{2} \rho \mathbf{C}_D \mathbf{A} (\mathbf{U}(Z, t))^2$$

donde  $\rho$  representa la densidad del viento;  $C_D$  es el coeficiente de arrastre;  $A$  es el área expuesta perpendicular a la dirección del viento y  $U(Z, t)$  es la velocidad relativa.

Reemplazando el desplazamiento elástico por la diferencia entre el desplazamiento total y el desplazamiento inelástico,  $\dot{\mathbf{x}}_d'(t) = \dot{\mathbf{x}}_d(t) - \dot{\mathbf{x}}_d''(t)$ , la ecuación de movimiento (13), se convierte en

$$\mathbf{M}_{dd}\ddot{\mathbf{x}}_d(t) + \mathbf{C}_{dd}\dot{\mathbf{x}}_d(t) + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{x}_d(t) = \mathbf{F}_e(t) + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{x}_d''(t) \quad (14)$$

En este trabajo se utilizará la formulación variable estado para resolver la ecuación de movimiento. Definiendo al vector de estados  $\mathbf{z}$ , la ecuación de movimiento se reescribe como

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_d''(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_{dd}^{-1}\overline{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}_{dd}^{-1}\mathbf{C}_{dd} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_d(t) \\ \mathbf{x}_d''(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{dd}^{-1}\mathbf{F}_e(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{dd}^{-1}\overline{\mathbf{K}} \end{pmatrix} \mathbf{x}_d''(t) \quad (15)$$

Definiendo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_{dd}^{-1}\overline{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}_{dd}^{-1}\mathbf{C}_{dd} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{dd}^{-1}\mathbf{F}_e(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{dd}^{-1}\overline{\mathbf{K}} \end{pmatrix} \quad (16)$$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz de transición de estados;  $\mathbf{F}(t)$  es la función de fuerzas en variable estado; y  $\mathbf{G}$  es la matriz de transición de desplazamientos inelásticos.

La ecuación incremental de movimiento en variable estado de forma discreta y condensada es:

$$\dot{\mathbf{z}}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{F}_{k+1} + \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}'' \quad (17)$$

donde  $\mathbf{z}_{k+1}$  es la forma discretizada de  $\mathbf{z}(t)$ .

Inicialmente solo se conocen las fuerzas aplicadas al sistema,  $\mathbf{F}_{k+1}$ , el vector de estados  $\mathbf{z}_k$  y el vector de desplazamientos inelásticos  $\mathbf{x}_k''$ . El primer paso consiste en obtener una aproximación inicial a la solución en  $\mathbf{z}_{k+1}$ , asumiendo que  $\mathbf{x}_{k+1}'' = \mathbf{x}_k''$  y se soluciona la ecuación 17. Los valores obtenidos del vector de estados  $\mathbf{z}_{k+1}$  son empleados en el FAM para determinar las rotaciones inelásticas.

El FAM es aplicado de manera incremental para considerar los estados en los que se encuentren las articulaciones plásticas. Dado que existen inversiones en las cargas al efectuar análisis dinámicos, el vector de respuesta inelástica en las articulaciones de forma incremental es

$$\Lambda_{k+1}'' = \Lambda_k'' + \Delta\Lambda'' \quad (18)$$

Reescribiendo el segundo renglón de la ecuación 4 en forma discreta, sustituyendo las matrices de rigidez por su forma condensada y reemplazando la respuesta inelástica en las articulaciones por su forma incremental se tiene

$$\mathbf{f}_{k+1} + \overline{\mathbf{K}}'' \Delta\Lambda'' = \overline{\mathbf{K}}''^T \mathbf{x}_{d,k+1} - \overline{\mathbf{K}}'' \Lambda_k'' \quad (19)$$

donde  $\mathbf{f}_{k+1}$  es la forma discretizada de  $\mathbf{f}(t)$ . Los términos del lado derecho son conocidos, el objetivo es calcular  $\mathbf{f}_{k+1}$  y  $\Delta\Lambda''$ . Para determinar los términos desconocidos se emplea la ecuación 19 y las relaciones fuerza-desplazamiento o momento-rotación  $(m, \theta)$  de las articulaciones plásticas.

### Proceso iterativo propuesto en este trabajo

Utilizando el concepto de rigidez inelástica tangente,  $k_t''$ , en Li y Wong (2014) se presenta una solución directa para conocer  $\mathbf{f}_{k+1}$  y  $\Delta\Lambda''$ , dada por:

$$k_t'' = \frac{k_e k_t}{k_e - k_t}$$

donde  $k_e$  es la rigidez elástica de la articulación y  $k_t$  es la rigidez tangencial para la rama en la que incursiona la articulación. Esta metodología dificulta la mecanización numérica en el proceso, además de que hace complicada la combinación de diferentes modelos de comportamiento en una misma estructura.

Una contribución, en este trabajo, es que se propone una metodología iterativa con alta velocidad de convergencia, de programación simple y con la ventaja de que permite combinar en una misma estructura distintos modelos de no-linealidad del material.

Considerando que la variable de iteración es  $j$  e iniciando con un valor de 0 y con un criterio de convergencia de  $|\mathbf{f}_{k+1}^j - \mathbf{f}_{k+1}^{j-1}| < tol$ , donde  $tol$  es una tolerancia de convergencia igual a  $1 \times 10^{-6} |\mathbf{f}_{k+1}^j|$ .

Asumiendo que  $\Delta\Lambda_i''^{,j} = 0$ , donde  $i$  es el número de articulación plástica,  $i = 1, 2, \dots, q$ , y  $q$  es el total de articulaciones plásticas, se estiman las fuerzas  $\mathbf{f}_{k+1}$  mediante la ecuación 19, denominadas  $\mathbf{f}_{k+1}^j$ .

Para cada articulación, con los valores obtenidos de manera inicial, se obtiene la respuesta total mediante

$$\Lambda_{k+1,i}^j = \frac{f_{k+1,i}^j}{k_{e,i}} + \Lambda_{k,i}'' + \Delta\Lambda_i''^{,j} \quad (20)$$

Se verifica en su modelo de comportamiento histerético la fuerza asociada para la respuesta inelástica obtenida con la ecuación 20 que corresponde a la iteración  $j=1$ . Posteriormente, se verifica la convergencia de las fuerzas obtenidas en el paso 0, que corresponde a la ecuación fundamental del FAM, con las del paso 1 que corresponden a las obtenidas con los modelos de comportamiento histerético de la articulación, si la diferencia de fuerzas satisface el criterio de convergencia establecido, se determinan los valores de  $\mathbf{f}_{k+1}$  y  $\Delta\Lambda''$ , en caso contrario, se determina el incremento de respuesta inelástica  $\Delta\Lambda_i''^{,j}$  para  $j=1$  despejándolo para cada articulación de la ecuación 20 como,

$$\Delta\Lambda_i''^{,j} = \Lambda_{k+1,i}^j - \frac{f_{k+1,i}^j}{k_{e,i}} - \Lambda_{k,i}'' \quad (21)$$

Se sustituye el valor de las fuerzas en el paso  $j-1$  con los estimados en el paso  $j$ . Con el valor de la respuesta inelástica obtenido se determinan las acciones empleando la ecuación 19. A continuación se repite el procedimiento realizado en el paso 1: para las fuerzas determinadas, se estima la respuesta en las articulaciones mediante la ecuación 20, se determinan las fuerzas correspondientes en los modelos de comportamiento de las articulaciones y se verifica el criterio de convergencia, en caso de que la solución obtenida sea insatisfactoria se actualiza el valor del incremento de respuesta inelástica mediante la ecuación 21. Lo anterior es repetido hasta que se cumpla la condición de aceptación de los resultados para  $\mathbf{f}_{k+1}$  y  $\Delta\mathbf{\Lambda}''$

Conocidas las incógnitas, se obtiene la respuesta inelástica en las articulaciones plásticas en  $k+1$  para determinar los desplazamientos inelásticos mediante

$$\mathbf{x}_{k+1}'' = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}' \mathbf{\Lambda}_{k+1}'' \quad (22)$$

Con los desplazamientos inelásticos determinados, se repite la solución de la ecuación de movimiento ahora empleando los valores de  $\mathbf{x}_{k+1}''$  obtenidos al aplicar el FAM y el procedimiento presentado en Li y Wong (2014). Este procedimiento se presenta en la Tabla 1 y 2, como secuencia de cálculo.

### MODELOS DE COMPORTAMIENTO DEL MATERIAL

En la formulación del FAM es posible considerar diversos modelos para el comportamiento del material, en forma esquemática, la ubicación de las articulaciones plásticas (AP) y los modelos empleados para cada tipo de comportamiento se muestran en la Figura 2 (Li y Wong, 2014).

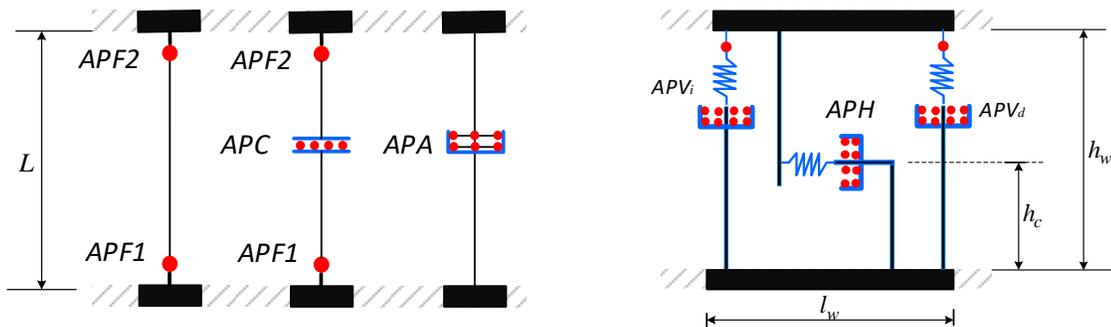


Figura 2. Ubicación de las articulaciones plásticas en los diversos modelos empleados en el FAM

El elemento a flexión puede tener articulaciones plásticas a flexión, APF, y se puede extender a elementos que representen el comportamiento del concreto reforzado, en donde la articulación en el centro del elemento es a cortante APC. Para el caso de un elemento a carga axial, es APA; y en el caso de muros las articulaciones a cortante, APV, capturan el comportamiento vertical de los extremos del muro y APH, el comportamiento horizontal o lateral del mismo.

Tabla 1. Solución paso a paso del análisis no lineal mediante el FAM con condensación estática

<b>A Valores iniciales</b>	
1	Obtener las matrices $\mathbf{K}$ , $\mathbf{K}'$ y $\mathbf{K}''$ a partir de las matrices de cada barra empleando las ecuaciones 8-10
2	Realizar la condensación estática de las matrices $\mathbf{K}$ , $\mathbf{K}'$ y $\mathbf{K}''$ ; y obtener las matrices $\bar{\mathbf{K}}$ , $\bar{\mathbf{K}}'$ , y $\bar{\mathbf{K}}''$ , (ecuación 12)
3	Introducir las matrices de masa $\mathbf{M}_{dd}$ y amortiguamiento $\mathbf{C}_{dd}$ . Así como las fuerzas externas $\mathbf{F}_e$ y las relaciones momento-rotación de las articulaciones plásticas
4	Obtener las condiciones iniciales $\mathbf{x}_{d,0}$ , $\dot{\mathbf{x}}_{d,0}$ y $\ddot{\mathbf{x}}_{d,0}$
5	Fijar el tamaño de paso $\Delta t$
6	Formar la matriz de estados $\mathbf{A}$ y el vector de fuerzas $\mathbf{F}(t)$ con la ecuación 16
7	Calcular la aceleración inicial de la ecuación de movimiento $\ddot{\mathbf{x}}_{d,0} = \mathbf{M}_{dd}^{-1}(\mathbf{F}_{e,0} - \mathbf{C}_{dd}\dot{\mathbf{x}}_{d,0} - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}_{d,0})$
<b>B Para cada paso de tiempo</b>	
1	Resolver la ecuación 17, considerando $\mathbf{x}_{k+1}'' = \mathbf{x}_k''$
2	Calcular los desplazamientos inelásticos con la metodología FAM
2.1	Suponer $\Delta\Lambda'' = 0$ y determinar las reacciones en $k+1$ mediante la ecuación 19
2.2	Comparar las reacciones resultantes contra las del límite de proporcionalidad, si no se superan permanece en el intervalo elástico, si se superan, calcular $\Delta\Lambda'' \neq 0$ siguiendo el procedimiento establecido en la Tabla 2
2.3	Obtener $\Lambda_{k+1}''$ con la ecuación 18
2.4	Obtener $\mathbf{x}_{k+1}''$ con la ecuación 22
3	Resolver la ecuación 17 repitiendo el paso B1 y emplear el valor de $\mathbf{x}_{k+1}''$ calculado en el paso B2
4	Calcular las aceleraciones relativas en el instante $k+1$ con $\ddot{\mathbf{x}}_{d,k+1} = \mathbf{M}_{dd}^{-1}(\mathbf{F}_{e,k+1} - \mathbf{C}_{dd}\dot{\mathbf{x}}_{d,k+1} - \bar{\mathbf{K}}\mathbf{x}_{d,k+1})$

Tabla 2. Procedimiento iterativo para obtener las acciones y respuestas en las articulaciones plásticas

<b>C Valores iniciales</b>	
1	Iniciar $j=0$ y $\Delta\Lambda''^{:,j} = 0$
2	Obtener $\mathbf{f}_{k+1}^j$ mediante la ecuación 19
<b>D Para cada valor de j</b>	
1	Hacer $j = j + 1$
2	Obtener la respuesta total con la ecuación 20
3	Asignar el valor de $\mathbf{f}_{k+1}^j$ según en el modelo de comportamiento histerético de cada articulación plástica para la respuesta total dada en el paso B1
4	Comparar la convergencia de las reacciones en las articulaciones plásticas, si $ \mathbf{f}_{k+1}^j - \mathbf{f}_{k+1}^{j-1}  < tol$ seguir en paso D9, en caso contrario seguir en paso D5
5	Obtener para cada articulación $\Delta\Lambda_i''^{:,j}$ con la ecuación 21
6	Hacer $\mathbf{f}_{k+1}^{j-1} = \mathbf{f}_{k+1}^j$
7	Obtener $\mathbf{f}_{k+1}^j$ mediante la ecuación 19
8	Repetir paso D1
9	Asignar $\mathbf{f}_{k+1} = \mathbf{f}_{k+1}^j$ y $\Delta\Lambda_i'' = \Delta\Lambda_i''^{:,j}$

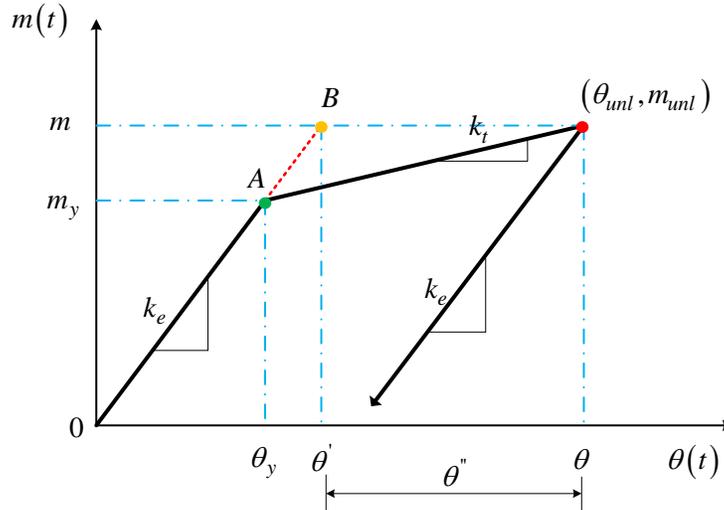


Figura 3. Relación momento-rotación para una articulación plástica con comportamiento bilineal

En este trabajo se considera el comportamiento del material con el modelo bilineal y las relaciones momento-rotación en las articulaciones plásticas (Figura 3). En el modelo de histéresis bilineal se presentan tres casos durante el análisis dinámico:

- Para  $\theta < \theta_y$ , la articulación permanece en el intervalo elástico, la rotación total es igual a la rotación elástica, en consecuencia  $\theta'' = 0$  y  $\Delta\theta'' = 0$ , y la pendiente de esta rama es la pendiente que conecta al punto de fluencia con el origen,  $k_e = \frac{m_y}{\theta_y}$ .
- Para  $\theta > \theta_y$ , la articulación incursiona en el intervalo inelástico, la pendiente posfluencia,  $k_t$ , es una fracción de la pendiente elástica,  $k_e$ , la rotación total es  $\theta = \frac{m - m_y}{k_t} + \theta_y$ , la rotación elástica es  $\theta' = m / k_e$  y la rotación inelástica es  $\theta'' = \theta - \theta'$ .
- Para  $\theta < \theta_k$  posterior a la incursión en el rango inelástico ocurre una descarga en la articulación y la pendiente es la elástica  $k_e$ , llamando  $m_{unl}$  al momento donde inició la descarga y  $\theta_{unl}$  a la rotación donde inició la descarga,  $\theta = \frac{m - m_{unl}}{k_e} + \theta_{unl}$ , dado que la pendiente de descarga es igual a la elástica,  $\theta'' = \theta''_{unl}$ , en consecuencia  $\Delta\theta'' = 0$ .

### EJEMPLO 1, SISTEMA DE UN GDL

Como primer ejemplo se determinará la respuesta inelástica para una ductilidad  $\mu = 2$ , de un sistema de un grado de libertad sometido a una excitación sísmica en la base. El sistema tiene un periodo  $T = 2s$  y una relación de amortiguamiento viscoso inherente de  $\xi = 5\%$ . Se espera que la articulación plástica ubicada en la base desarrolle un comportamiento elastoplástico, ( $k_t = 0$ ). El registro sísmico empleado corresponde a la componente N90E de la estación SCT-1 del sismo del 19 de septiembre de 1985 (Figura 4).

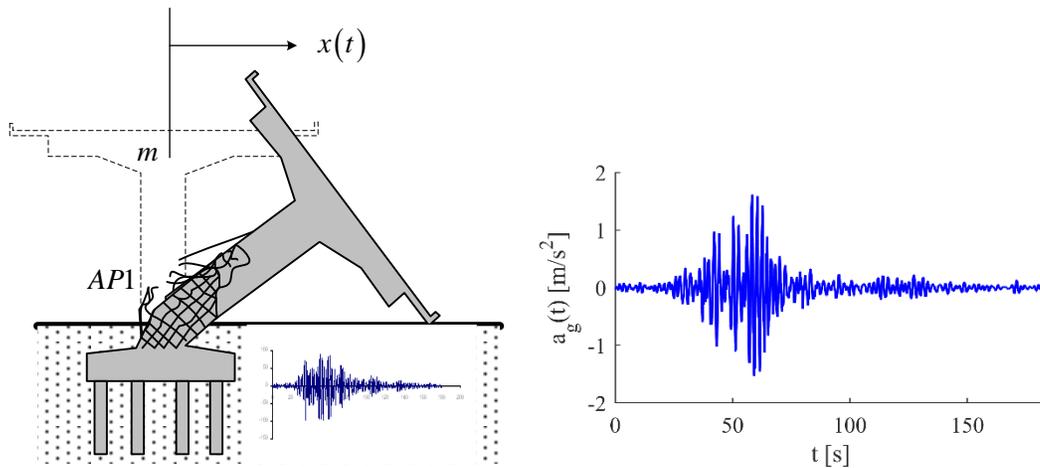


Figura 4. Sistema de un grado de libertad sometidos a la excitación sísmica N90E-SCT-1

La respuesta inelástica para una ductilidad dada es dependiente de la respuesta de un sistema elástico sometido a la misma excitación. Como primer paso se determinó la respuesta elástica para conocer la máxima demanda de desplazamientos. Suponiendo una masa  $m = 1 \text{ kg}$ , la frecuencia angular del sistema es  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$ , la rigidez del sistema es  $k = \omega^2 m = 9.8696 \text{ N/m}$ , y el coeficiente de amortiguamiento es  $c = 2m\xi\omega = 0.3142 \text{ N s/m}$ . La integración de la ecuación de movimiento de manera elástica se realizó empleando el método de Newmark para sistemas lineales empleando  $\beta = 1/4$  y  $\gamma = 1/2$  siguiendo el procedimiento descrito en Chopra (2012). La respuesta dinámica en términos de desplazamientos se muestra en la Figura 5.

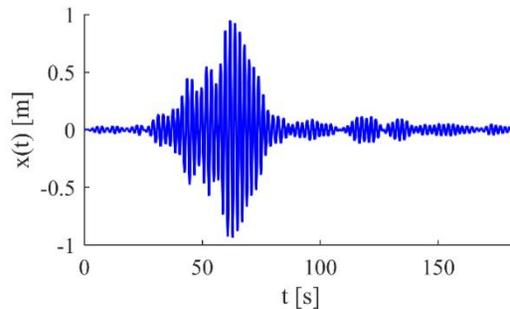


Figura 5. Desplazamiento elástico del ejemplo de aplicación de un sistema de un GDL

El desplazamiento elástico máximo obtenido es de  $x_{max} = 0.9497 \text{ m}$ . El desplazamiento de fluencia correspondiente es  $x_y = x_{max} / \mu = 0.4749 \text{ m}$  y la fuerza de fluencia es  $f_y = kx_y = 4.6866 \text{ N}$ .

Para fines de comparación la respuesta inelástica se obtuvo con dos métodos: 1) empleando el FAM y 2) con el método tradicional en el que actualiza la matriz de rigidez. En ambos casos se usaron los mismos valores de  $x_y$  y  $f_y$  presentados.

### Procedimiento y resultados empleando el FAM

Se inicia el procedimiento determinando las matrices de rigidez de la barra que forma al sistema. La matriz de rigidez elemental en el sistema local es

$$\mathbf{k}^{(e)} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

donde el nodo inicial está en el extremo inferior del sistema y el nodo final en el extremo superior. El coseno y seno del ángulo del eje longitudinal de la barra respecto al eje x global son  $l = (x_f - x_i)/L = 0$  y  $m = (y_f - y_i)/L = 1$ , respectivamente. La matriz de rotación obtenida para estos valores es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Empleando las ecuaciones 8-10, se determinaron las matrices de rigidez requeridas, siendo

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 & -12EI/L^3 & 0 & -6EI/L^2 \\ 0 & EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & 4EA/L & 6EI/L^2 & 0 & 2EI/L \\ -12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 & 12EI/L^3 & 0 & 6EI/L^2 \\ 0 & -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 \\ -6EI/L^2 & 0 & 2EI/L & 6EI/L^2 & 0 & 4EA/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'^{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}''^{(e)} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

Los grados de libertad no restringidos del sistema son el desplazamiento horizontal del nodo superior y la rotación del nodo superior y la articulación plástica (AP1) es de flexión en el nodo inferior. Por lo anterior, de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(e)}$  se deben ensamblar los renglones y columnas 4 y 6 que corresponden a la traslación horizontal y rotación del nodo superior; de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}'^{(e)}$  se deben ensamblar los renglones 4 y 6 y la columna 3 ya que los renglones corresponden a la traslación horizontal y rotación del nodo superior mientras la columna corresponde a una articulación momento-rotación en el nodo inicial; y de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}''^{(e)}$  se debe ensamblar el renglón y columna 3 ya que corresponde a una articulación momento-rotación en el nodo inicial. Con base en lo anterior las matrices de rigidez del sistema para el análisis son:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 6EI/L^2 \\ 2EI/L \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}'' = [4EI/L]$$

El primer renglón y columna de  $\mathbf{K}$ , corresponde a la traslación del sistema y el segundo a su rotación. Empleando la ecuación 12 se determinan las matrices condensadas siendo,

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{12EI}{L^3} - \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \left( \frac{L}{4EI} \right) \left( \frac{6EI}{L^2} \right) = \frac{12EI}{L^3} - \frac{9EI}{L^3} = \left[ \frac{3EI}{L^3} \right]$$

$$\bar{\mathbf{K}}' = \frac{6EI}{L^2} - \left( \frac{6EI}{L^2} \right) \left( \frac{L}{4EI} \right) \left( \frac{2EI}{L} \right) = \frac{6EI}{L^2} - \frac{3EI}{L^2} = \left[ \frac{3EI}{L^2} \right]$$

$$\bar{\mathbf{K}}'' = \frac{4EI}{L} - \left( \frac{2EI}{L} \right) \left( \frac{L}{4EI} \right) \left( \frac{2EI}{L} \right) = \frac{4EI}{L} - \frac{EI}{L} = \left[ \frac{3EI}{L} \right]$$

Para un valor de  $L = 1 \text{ m}$ , se tiene que  $\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}' = \bar{\mathbf{K}}'' = 9.8696$ . La matriz de masa y amortiguamiento de los grados de libertad laterales respectivamente son  $\mathbf{M}_{dd} = [1]$  y  $\mathbf{C}_{dd} = [0.3142]$ . Con los valores presentados se determinó de la respuesta inelástica siguiendo el procedimiento establecido en la Tabla 1.

La Tabla 3 presenta el cálculo de los valores iniciales, la Tabla 4 presenta la determinación de la respuesta para un punto cuando la estructura permanece en el intervalo elástico y la Tabla 5 presenta la determinación de la respuesta para un punto cuando la estructura incursiona en el intervalo inelástico.

Tabla 3. Cálculos iniciales para el sistema de un GDL sometido a una excitación sísmica

A	Valores iniciales
1	$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix}, \mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 6EI/L^2 \\ 2EI/L \end{bmatrix}, \mathbf{K}'' = [4EI/L]$
2	$\bar{\mathbf{K}} = [3EI/L^3], \bar{\mathbf{K}}' = [3EI/L^2],$ y $\bar{\mathbf{K}}'' = [3EI/L]$ para $L = 1$ m, $\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}' = \bar{\mathbf{K}}'' = 9.8696$
3	$\mathbf{M}_{dd} = [1], \mathbf{C}_{dd} = [0.3142], \mathbf{F}_e = -\mathbf{M}_{dd}\ddot{x}_g, k_e = 9.8696, k_t = 0,$ y $f_y = 4.6866$ N
4	$\mathbf{x}_{d,0} = 0, \dot{\mathbf{x}}_{d,0} = 0,$ y $\ddot{\mathbf{x}}_{d,0} = 0$
5	$\Delta t = 0.01$ s
6	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9.8696 & -0.3142 \end{bmatrix}, \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{F}_e \end{pmatrix}$
7	$\ddot{\mathbf{x}}_{d,0} = 0.0106$

Tabla 4. Solución paso a paso del análisis no lineal para el sistema de un grado de libertad sometido a una excitación sísmica para el paso  $k = 2$

B	Para $k=2$
1	$x_{d,k=2} = 5.29 \times 10^{-7}$
2	Calcular los desplazamientos inelásticos
2.1	$f = 5.225 \times 10^{-6}$ considerando $\Delta \Lambda'' = 0$
2.2	Como $f = 5.225 \times 10^{-6} < f_y = 4.6866, \Delta \Lambda'' = 0$
2.3	$\Lambda''_{k=2} = 0$
2.4	$\mathbf{x}''_{k=2} = 0$
3	Usando $\mathbf{x}''_{k=2}$ , calculado en el paso 2, $\mathbf{z}_{k=2} = \begin{pmatrix} x_{d,k=2} \\ \dot{x}_{d,k=2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.29 \times 10^{-7} \\ 1.05 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$
4	$\ddot{\mathbf{x}}_{d,k=2} = 0.0106$

Tabla 5. Solución paso a paso del análisis no lineal para el sistema de un grado de libertad sometido a una excitación sísmica para el paso  $k = 5159$

B	Para $k=5,159$
1	$x_{d,k=5159} = 0.4777$
2	Calcular los desplazamientos inelásticos
2.1	$f = 4.7149$ considerando $\Delta \Lambda'' = 0$
2.2	Como $f = 4.7149 > f_y = 4.6866, \Delta \Lambda'' \neq 0,$ se determina la respuesta usando las ecuaciones del FAM y el modelo de comportamiento de la articulación plástica, la Tabla 6 presenta el desarrollo del procedimiento para obtener la respuesta inelástica de la articulación
2.3	$\Lambda''_{k=5159} = 0.0028$
2.4	$\mathbf{x}''_{k=5159} = 0.0028$

$$3 \quad \text{Usando } \mathbf{x}''_{k=5159}, \text{ calculado en el paso 2, } \mathbf{z}_{k=5159} = \begin{pmatrix} x_{d,k=5159} \\ \dot{x}_{d,k=5159} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4777 \\ 0.8176 \end{pmatrix}$$

$$4 \quad \ddot{\mathbf{x}}_{d,k=5159} = -4.2438$$

Tabla 6. Procedimiento iterativo para obtener las acciones y respuestas en las articulaciones plásticas para el sistema de un GDL sometido a una excitación sísmica para  $k = 5159$

<b>C</b>		<b>Valores iniciales</b>
1		$j = 0$ y $\Delta \Lambda''^{.j} = 0$
2		$\mathbf{f}_{k=5159}^{j=0} = 4.7149$
<b>D</b>		<b>Para cada valor de j</b>
1, j=1		$j = 1$
2, j=1		$\Lambda_{k=5159}^{j=1} = 0.4777$
3, j=1		Para $\Lambda_{k=5159}^{j=1} = 0.4777$ , la articulación se encuentra en el punto posterior a la fluencia, en consecuencia $\mathbf{f}_{k=5159}^{j=1} = 4.6866$
4, j=1		$ \mathbf{f}_{k=5159}^{j=1} - \mathbf{f}_{k=5159}^{j=0}  < tol,  4.6866 - 4.7149  < 4.6866 \times 10^{-6}$ como $0.0279 > 4.6866 \times 10^{-6}$ no se alcanzó la convergencia en $j = 1$
5, j=1		$\Delta \Lambda''^{.j=1} = 0.0028$
6, j=1		$\mathbf{f}_{k=5159}^{j=0} = 4.6866$
7, j=1		$\mathbf{f}_{k=5159}^{j=1} = 4.6866$
8, j=1		Repetir paso <b>D1</b>
1, j=2		$j = 2$
2, j=2		$\Lambda_{k=5159}^{j=2} = 0.4777$
3, j=2		Para $\Lambda_{k=5159}^{j=2} = 0.4777$ , la articulación se encuentra en el punto posterior a la fluencia, en consecuencia $\mathbf{f}_{k=5159}^{j=2} = 4.6866$
4, j=2		$ \mathbf{f}_{k=5159}^{j=2} - \mathbf{f}_{k=5159}^{j=1}  < tol,  4.6866 - 4.6866  < 4.6866 \times 10^{-6}$ como $0 < 4.6866 \times 10^{-6}$ se alcanzó la convergencia en $j = 2$
9, j=2		$\mathbf{f}_{k=5159} = 4.6866$ y $\Delta \Lambda'' = 0.0028$

### Resultados empleando la metodología tradicional y comparación con el FAM

La solución del ejemplo de un oscilador de un GDL, por medio del método tradicional en el que se actualiza la matriz de rigidez, se obtuvo con el método de Newmark (Chopra, 2012) con  $\beta = 1/4$  y  $\gamma = 1/2$

En la Figura 6 se muestra la comparación de la respuesta inelástica de desplazamiento, velocidad, y fuerza restitutiva obtenida con el FAM y actualizando la matriz de rigidez mediante el método de Newmark.

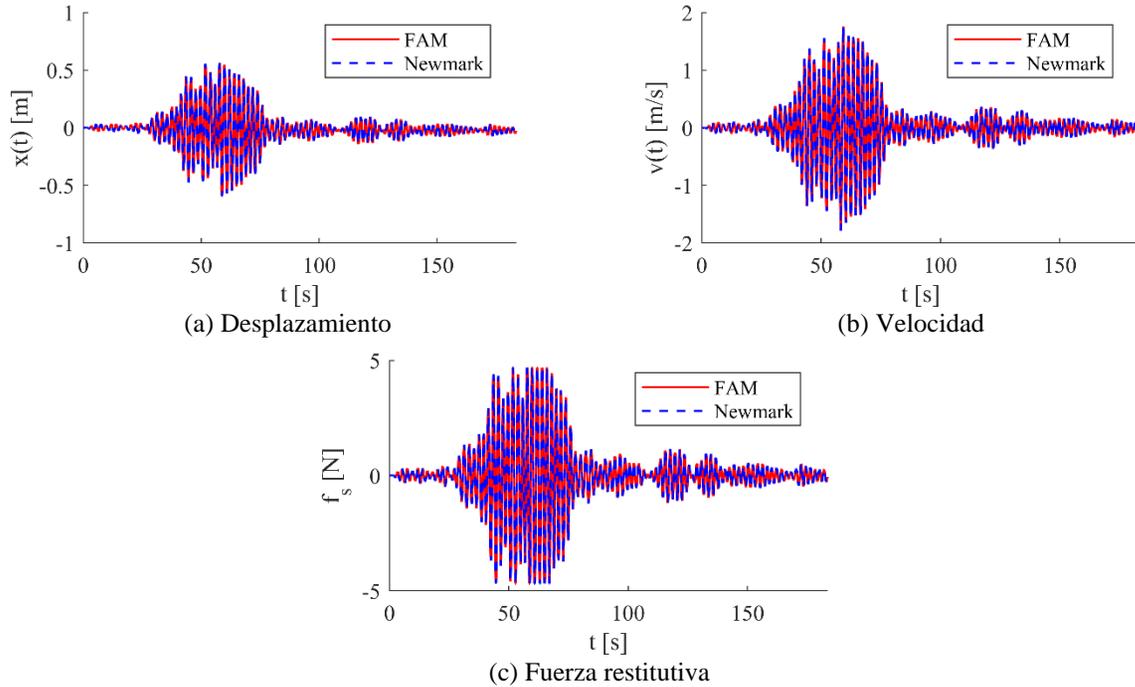


Figura 6. Comparación de la respuesta inelástica de la estructura

Además, se determinó la respuesta en la articulación plástica y la energía histerética disipada en la misma empleando el FAM y actualizando la matriz de rigidez mediante el método de Newmark. La comparativa se presenta en la Figura 7.

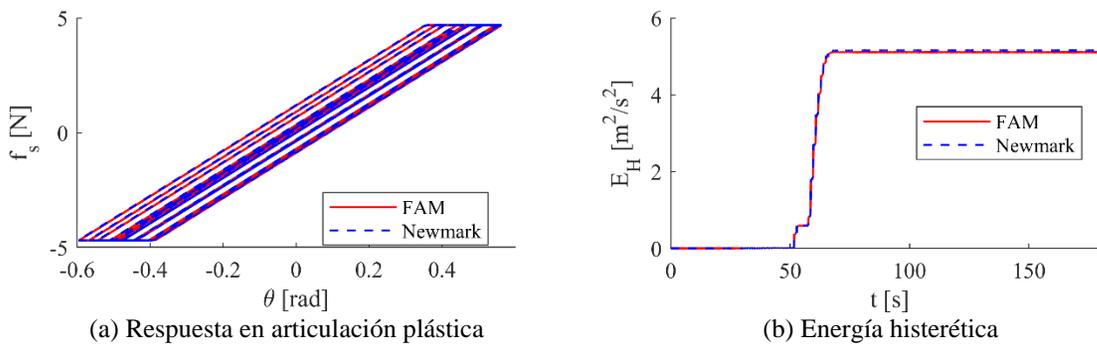


Figura 7. Respuesta en la articulación plástica de la estructura actualizando la matriz de rigidez

Con base en los resultados obtenidos, se observa que las respuestas en el dominio del tiempo de desplazamiento, velocidad y fuerza restitutiva, son iguales para ambas metodologías. Además, la gráfica momento-rotación en la articulación plástica y los niveles de rotación son iguales. La gráfica de energía histerética en el dominio del tiempo muestra que con ambos métodos se alcanzó la misma disipación de energía, además, los incrementos en la energía disipada ocurren en instantes de tiempo similares.

## EJEMPLO 2, ESTRUCTURA DE SEIS NIVELES, ANTE CARGA SÍSMICA Y EÓLICA

Se consideró un marco plano propuesto por Li y Wong (2014) compuesto por seis niveles y tres crujías cuyos entrepisos forman un diafragma rígido (Figura 8). Se consideró amortiguamiento clásico con

un valor de 2% para los dos primeros modos de vibrar, se caracterizaron 84 articulaciones plásticas con relación momento-rotación y comportamiento bilineal. El marco está formado por perfiles W con acero ASTM A992. Las secciones asignadas a vigas y columnas se muestran en la Tabla 7.

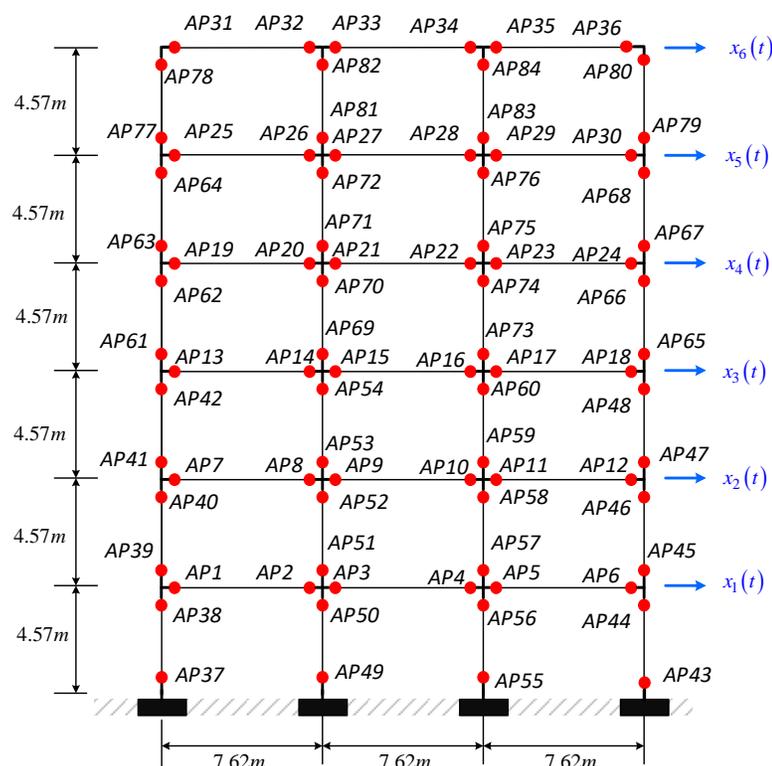


Figura 8. Marco de seis niveles del ejemplo 2

Tabla 7. Secciones transversales del marco de seis niveles

Elementos	Sección transversal
Vigas niveles 1 a 3	W36x210
Vigas nivel 4	W36x150
Vigas nivel 5	W36x135
Vigas nivel 6	W27x94
Columnas ejes A y D niveles 1 a 3	W14x283
Columnas ejes B y C niveles 1 a 3	W14x500
Columnas ejes A y D niveles 4 a 5	W14x257
Columnas ejes B y C niveles 4 a 5	W14x455
Columnas ejes A y D nivel 6	W14x193
Columnas ejes B y C nivel 6	W14x342

Se determinó la respuesta inelástica de la estructura para excitaciones sísmicas y eólicas empleando el FAM y el software de análisis SAP2000. Se utilizó este programa ya que, aunque no sea la herramienta más refinada para hacer un análisis dinámico no lineal, permite estimar la respuesta dinámica no lineal en una estructura actualizando la matriz de rigidez, y es uno de los paquetes de análisis más usados en el ejercicio profesional.

**Procedimiento empleando el FAM**

La matriz de masas está dada por:

$$\mathbf{M}_{dd} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \text{ Mg}$$

La matriz de rigidez elástica condensada es:

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 395507.04 & -213554.93 & 31180.05 & -2540.46 & 251.66 & -17.85 \\ -213554.93 & 363683.85 & -206960.01 & 28146.99 & -2787.57 & 197.77 \\ 31180.05 & -206960.01 & 337940.22 & -187854.71 & 30638.31 & -2173.90 \\ -2540.46 & 28146.99 & -187854.71 & 314087.82 & -172964.18 & 20898.79 \\ 251.66 & -2787.57 & 30638.31 & -172964.18 & 240715.04 & -95830.88 \\ -17.85 & 197.77 & -2173.90 & 20898.79 & -95830.88 & 76924.48 \end{bmatrix} \text{ kN m}^{-1}$$

Se estimó el punto de fluencia y la pendiente posfluencia empleando las expresiones propuestas para elementos de acero (Lignos y Krawinkler, 2011). La Tabla 8 presenta las propiedades de las articulaciones plásticas según la sección transversal, donde  $\alpha_i = k_t / k_e$ .

Tabla 8. Propiedades de las articulaciones plásticas para el marco de seis niveles

Sección transversal	$k_e$	$m_y$	$\alpha_i$	$k_t$
W36x210	865012.75	4705.67	0.0275	23757.16
W36x150	592403.36	3282.25	0.0313	18549.61
W36x135	511144.18	2875.46	0.0328	16789.82
W27x94	214287.56	1570.63	0.0329	7042.49
W14x283	419583.62	3061.96	0.0101	4255.15
W14x500	897080.39	5931.56	0.0085	7604.51
W14x257	371506.85	2751.35	0.0106	3920.99
W14x455	785627.55	5287.59	0.0087	6827.58
W14x193	262240.75	2005.34	0.0116	3042.67
W14x342	535407.31	3796.25	0.0096	5116.17

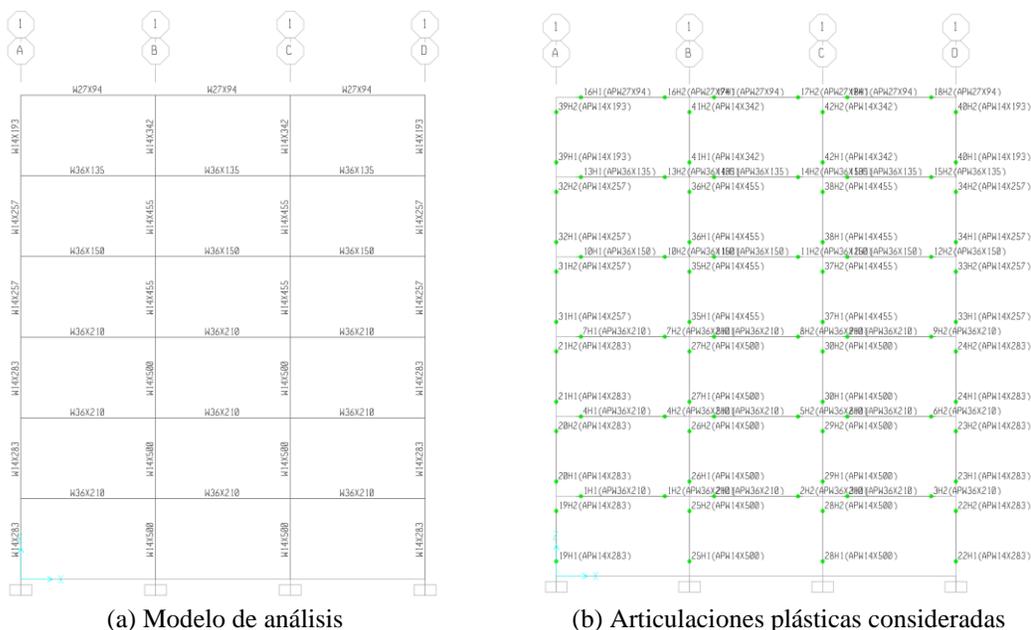
Los periodos de vibrar de la estructura y se reportan en la Tabla 9. Se puede ver que los valores de los periodos reportados en Li y Wong (2014) y los obtenidos empleando el software SAP 2000, son similares a los obtenidos en este trabajo.

Tabla 9. Periodos del marco de seis niveles

Modo	Li y Wong (2014)	SAP 2000	Este trabajo
1	1.000	1.107	1.107
2	0.362	0.400	0.400
3	0.207	0.236	0.236
4	0.148	0.163	0.163
5	0.114	0.125	0.125
6	0.093	0.104	0.104

### Modelo de SAP2000

La Figura 9 muestra el modelo de análisis de SAP2000 y las articulaciones plásticas asignadas.



(a) Modelo de análisis (b) Articulaciones plásticas consideradas  
 Figura 9. Modelo de análisis en el programa SAP2000

### Respuesta sísmica

Se determinó la respuesta sísmica considerando el registro obtenido en la estación Villita Corona el 19 de septiembre de 1985 componente S05E. Las respuestas obtenidas en el nivel de azotea se muestran en la Figura 10.

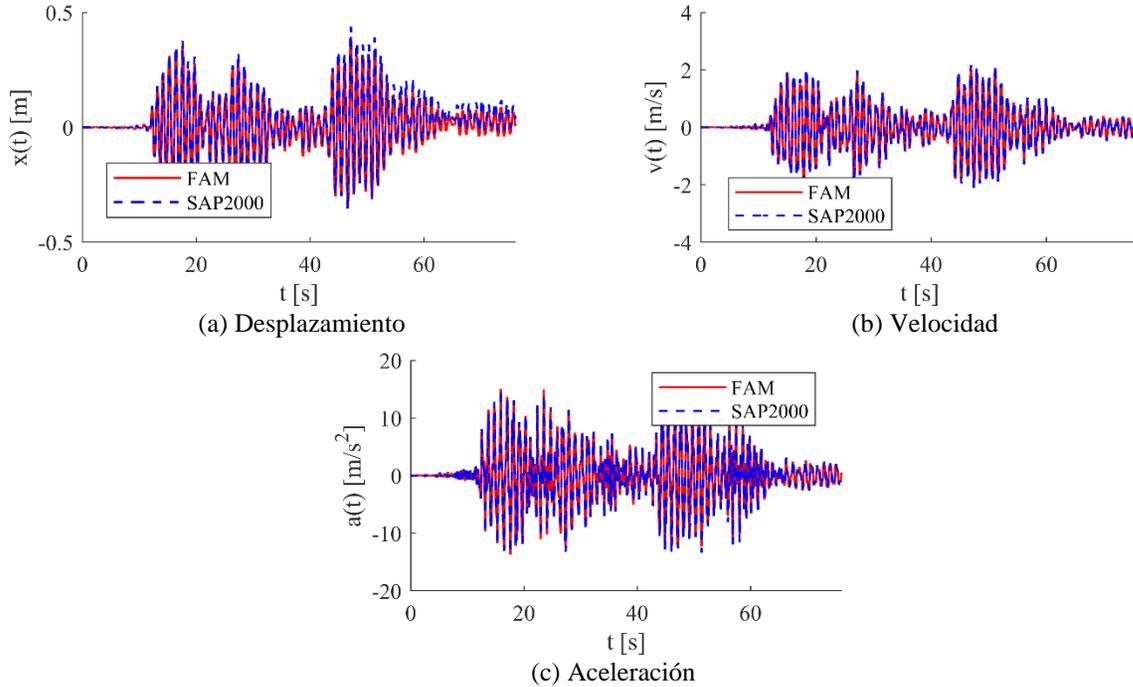


Figura 10. Respuesta de azotea del marco de seis niveles para el registro de Villita Corona

En la Figura 10 se observa que posterior al segundo 60, es evidente una deformación permanente en la respuesta de desplazamientos de azotea. Los resultados indican que ambos modelos predicen resultados similares, existen algunas diferencias en las amplitudes que pueden atribuirse al proceso de integración numérica, algoritmos de solución de los sistemas de ecuaciones y tolerancias internas del programa de análisis.

Se determinaron los perfiles de respuesta máximos y RMS, de los desplazamientos, distorsiones de entrepiso (IDR) y de la aceleración, la comparación de los valores obtenidos se muestra en la Figura 11.

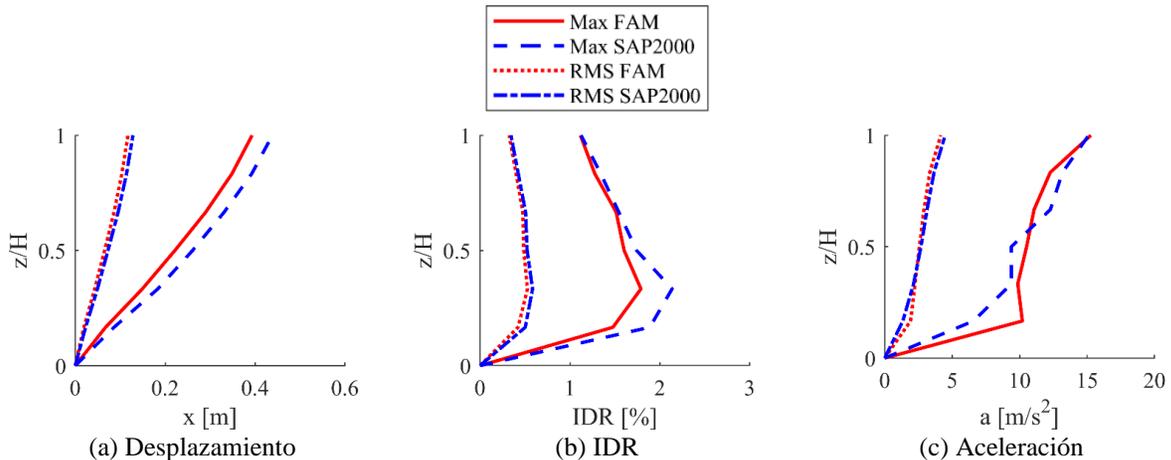


Figura 11. Perfiles de respuesta del marco de seis niveles para el registro de Villita Corona

Los resultados presentados en la Figura 11 indican que ambos modelos exhiben tendencias similares. En cuanto a los valores máximos, el modelo del SAP2000 muestra amplitudes más elevadas en comparación

con el FAM para los desplazamientos y distorsiones. El desplazamiento máximo se observó en la azotea, la distorsión máxima en el segundo entrespiso y la aceleración máxima también en la azotea. La respuesta máxima de desplazamientos aumenta con la altura, y la respuesta RMS es aproximadamente la cuarta parte de la respuesta máxima. La distorsión máxima alcanzada con el FAM es mayor que 1.75%, lo que excede el límite admisible para estructuras con ductilidad baja y se encuentra cercana al límite de estructuras con ductilidad media, según las NTC-DS-17 (2017). En cuanto a las aceleraciones, se observa que el perfil RMS aumenta de amplitud con la altura y el perfil máximo tiene aproximadamente la misma tendencia; además, las aceleraciones máximas ocurren en la parte superior del edificio, con un valor mayor que 1.5g, lo que representa una importante magnitud en la respuesta de la estructura. Asimismo, se aprecia que las amplitudes de los valores RMS de la respuesta de ambos modelos presentan una mayor similitud en contraste con los valores máximos. Estas diferencias pueden atribuirse principalmente a variaciones en el método de integración numérica, los algoritmos de solución de los sistemas de ecuaciones y las tolerancias internas del programa de análisis.

En total se formaron 30 articulaciones plásticas en ambos modelos, la posición de las articulaciones plásticas se muestra en la Figura 12. Las articulaciones con mayor rotación alcanzada fueron la AP49 y la AP55, ubicadas en las columnas de la planta baja, para ambas articulaciones los lazos de histéresis obtenidos son semejantes, debido a la simetría de la estructura.

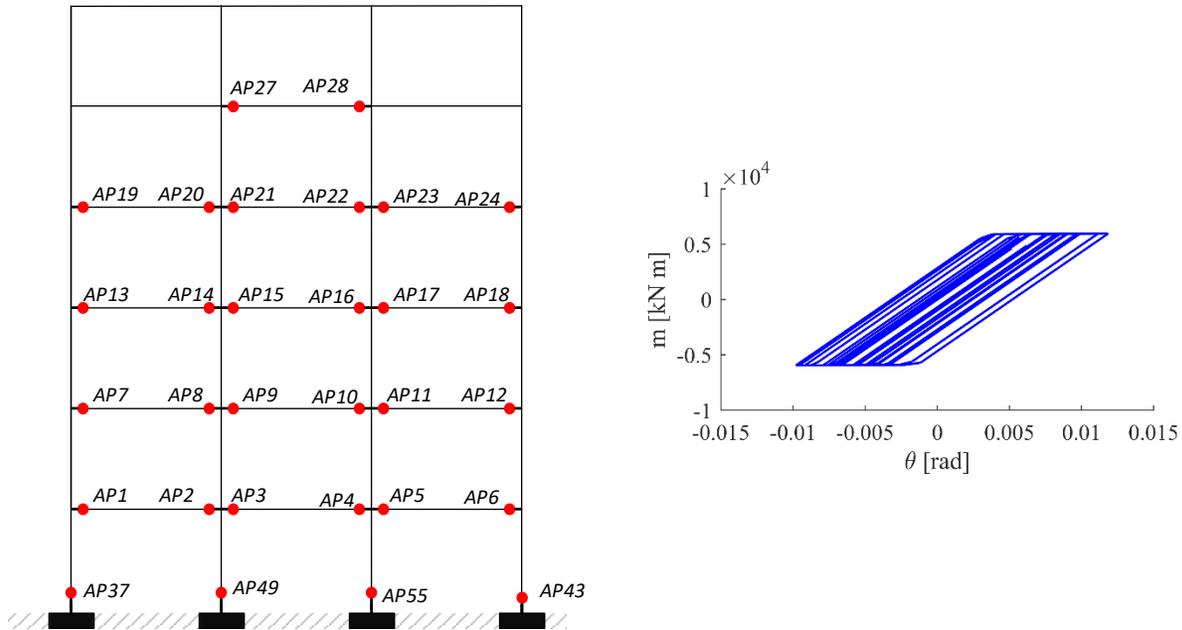


Figura 12. Articulaciones plásticas formadas y comportamiento histérico de la AP49

La Figura 13 muestra la comparación de la respuesta de momento en la articulación plástica 49 en el dominio del tiempo para ambos modelos. Se observa que la respuesta tiene una amplitud similar en el dominio del tiempo en ambos análisis. Las zonas de fluencia de la articulación de los dos modelos se presentan en instantes análogos y coinciden en el patrón de desarrollo de la respuesta cíclica. Esto indica que el FAM reproduce de manera adecuada la respuesta inelástica de la estructura.

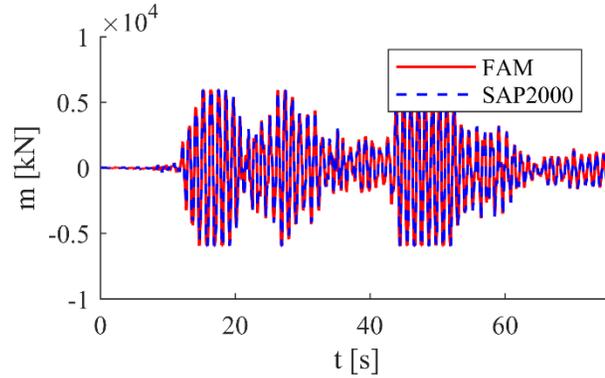


Figura 13. Comparación de la respuesta de momento de la AP49

### Respuesta eólica

La estructura presentada también fue sometida a un análisis eólico mediante una simulación de historias de velocidad empleando una técnica espectral. Se consideró que se ubica en la ciudad de Acapulco, Guerrero, con una altitud media de 3 msnm, temperatura media anual de 28.7 y presión atmosférica de 760 mm de Hg en terreno tipo 1 con una topografía sensiblemente plana. La velocidad de referencia a 10 m considerada altura promediada a 10 minutos, fue de 166.67 m/s.

Se consideró que el marco analizado forma parte de una estructura en el espacio formada por marcos de acero (Figura 14). Se seleccionó la cruja correspondiente al eje 2, con un ancho expuesto a la acción del viento de 7.62m.

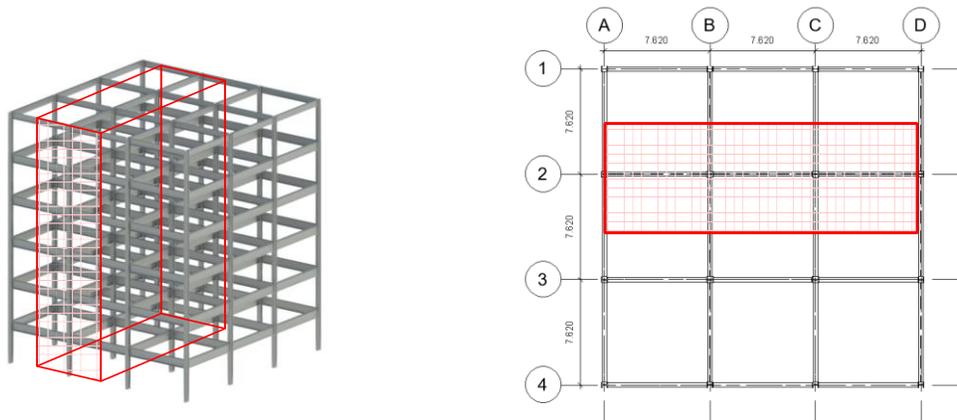
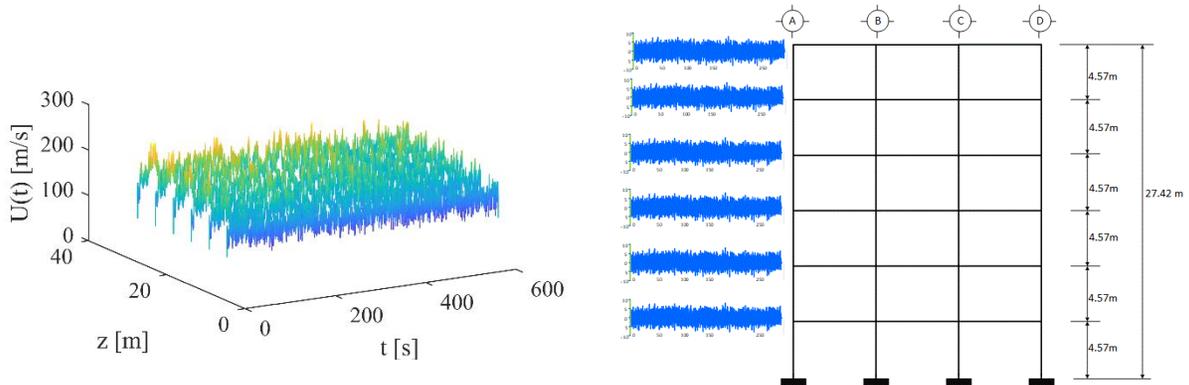


Figura 14. Ubicación del marco considerado para el análisis eólico

Se realizaron simulaciones de historias de viento con una duración de 600s, correspondientes a cada 4.57m, que es la altura entre niveles de entrepiso (Figura 15a), que se aplicaron en cada entrepiso (Figura 15b). Para la aplicación de fuerzas se consideró un coeficiente  $C_D = 0.80$ .



(a) Historias sintéticas de velocidades de viento. (b) Aplicación de las historias de velocidades.  
 Figura 15. Excitación eólica y modelo matemático de aplicación

Las fuerzas fueron aplicadas al modelo de SAP2000, pero en este análisis no se tuvo convergencia. Las respuestas obtenidas en el nivel de azotea obtenidas con el FAM se muestran en la Figura 16.

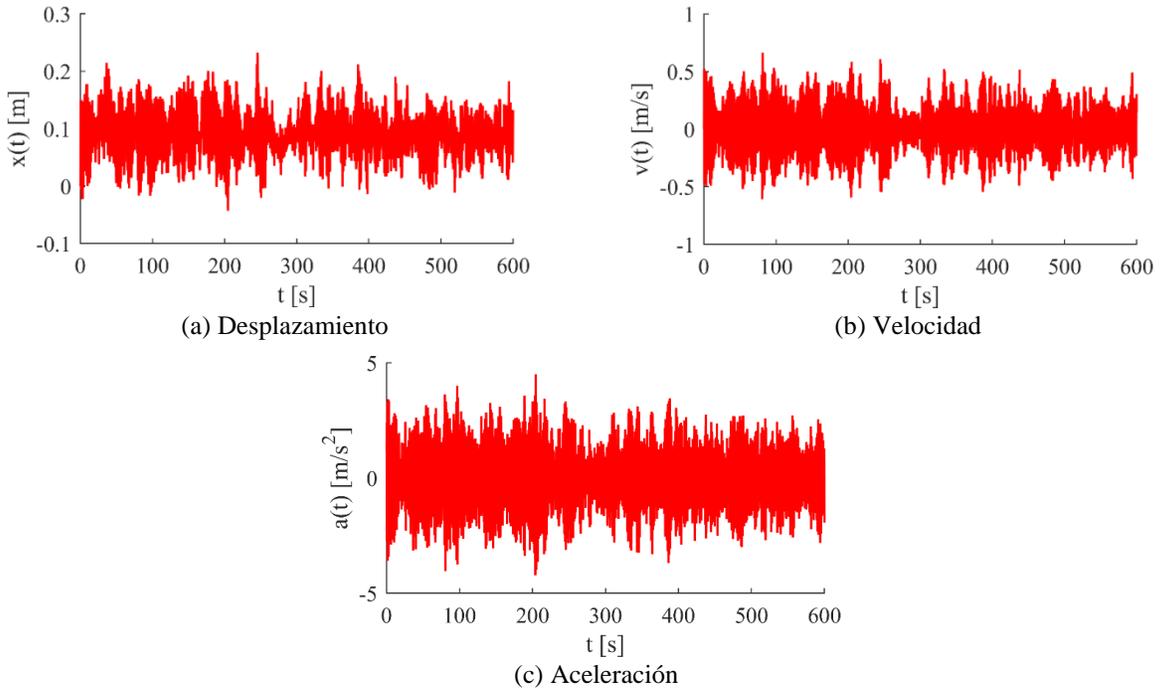


Figura 16. Respuesta eólica de azotea del marco de seis niveles

En la Figura 16 se observa que el desplazamiento medio del último entrepiso es de 0.10m, y un desplazamiento máximo de 0.23m. Se determinaron los perfiles de respuesta máximos y RMS de los desplazamientos, distorsiones, IDR, y de la aceleración (Figura 17). La relación promedio entre la respuesta máxima y RMS de desplazamiento es de 2.3.

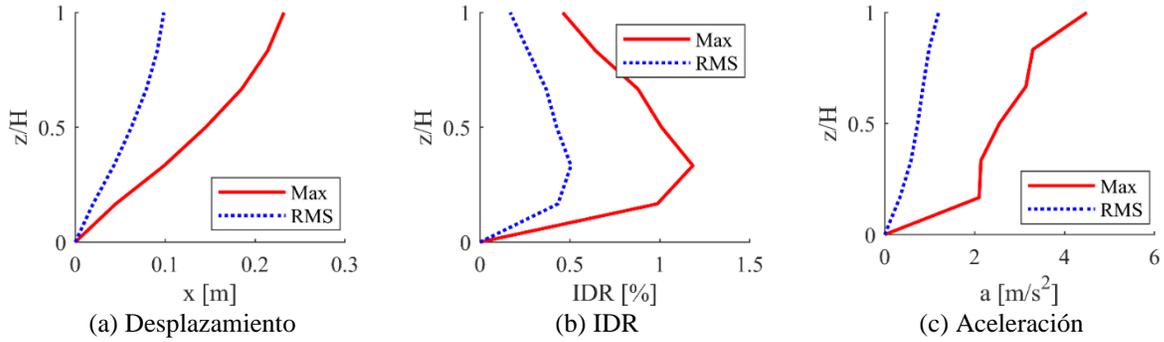


Figura 17. Perfiles de respuesta eólica del marco de seis niveles

Para el caso de las distorsiones de entrepiso, se observa que la mayor amplitud de la RMS como el valor máximo, se presentan para  $z/H=0.30$ , con un valor máximo de 1.2%, que de acuerdo con las NTC-DS-17 (2017), se tiene que este marco se encuentra cerca del límite admisible para estructuras con ductilidad baja. El RMS de las aceleraciones y su valor máximo aumentan con la altura, presentándose una aceleración máxima de 0.5g, el cual se considera fuera de los límites de servicio por confort de los ocupantes. Se calcularon los elementos mecánicos en la base, el cortante basal fue de  $V_b = 6,773 \text{ kN}$ , y el momento de  $M_b = 112,985 \text{ kN m}$ . Se formaron 2 articulaciones en el primer nivel de la estructura, la AP49 y la AP55, debido a la regularidad de la estructura, los lazos de histéresis obtenidos en ambas articulaciones son iguales (Figura 18).

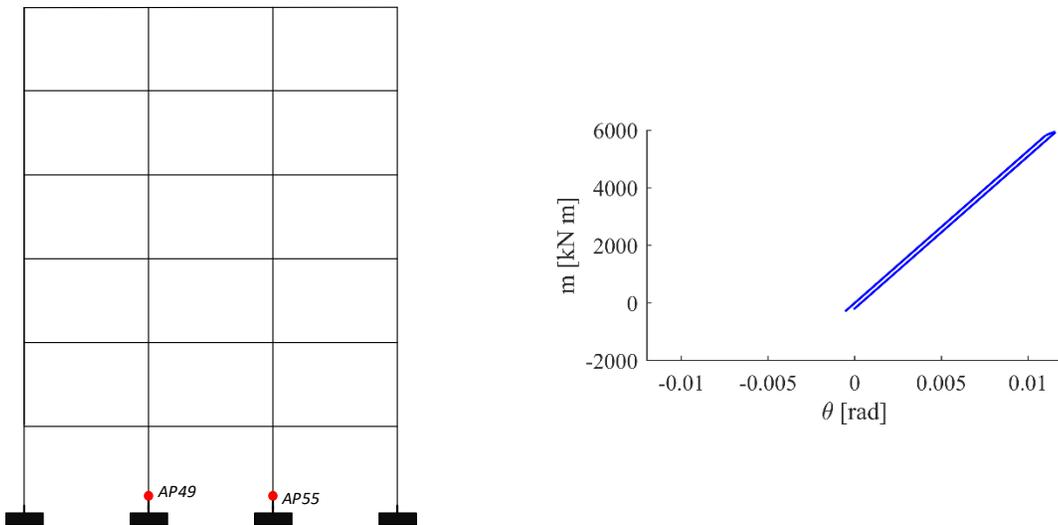


Figura 18. Articulaciones plásticas y su ciclo histérico, del marco de seis niveles ante carga eólica

### DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El primer ejemplo presentó la aplicación del FAM para el análisis inelástico de un sistema de un grado de libertad comparando los resultados con los obtenidos actualizando la matriz de rigidez con el método de Newmark bajo una excitación sísmica. La Tabla 10 muestra la comparación de los valores máximos de desplazamiento, velocidad, energía histérica y respuesta en la articulación plástica. Las diferencias observadas entre ambos métodos son inferiores al 1%, con un máximo de 0.79% para la energía

histerética. Esta alta concordancia valida la precisión del FAM en sistemas de un grado de libertad, garantizando la reproducibilidad de los parámetros críticos de la respuesta dinámica.

Tabla 10. Comparación de resultados para el sistema de un grado de libertad

Parámetro	FAM	Newmark	Diferencia
$x_{\max}$ [m]	0.595	0.597	0.36%
$\dot{x}_{\max}$ [m/s]	1.785	1.786	0.04%
$E_H$ [m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	5.110	5.151	0.79%
$\theta_{\max}$ [rad]	0.595	0.597	0.36%

El segundo ejemplo analiza la respuesta dinámica no lineal de una estructura de múltiples grados de libertad bajo excitación sísmica y eólica, utilizando el FAM y el software SAP2000. La Tabla 11 presenta la comparación de los valores máximos obtenidos en la respuesta sísmica para parámetros clave. Se observa que la mayor diferencia se encuentra en la distorsión de entrepiso, con un 16.2% en el segundo entrepiso. No obstante, el perfil general de distorsiones, mostrado en la Figura 11b, revela que la tendencia es consistente para el resto de los entrepisos, lo que sugiere que esta discrepancia es específica de una condición particular de este entrepiso. Para los demás parámetros, la diferencia máxima es del 10.3% en el desplazamiento, lo cual es consistente con los resultados reportados por Nica *et al.* (2022), quienes hallaron diferencias de hasta 9.81% al comparar el FAM con el análisis paso a paso de SAP2000 en un edificio de 10 niveles.

Tabla 11. Comparación de resultados para el sistema de un grado de libertad

Parámetro	FAM	SAP2000	Diferencia
$x_{\max}$ [m]	0.393	0.438	10.3%
<i>IDR</i>	0.018	0.021	16.2%
$\dot{x}_{\max}$ [m/s]	2.036	2.182	6.7%
$\ddot{x}_{\max}$ [m/s <sup>2</sup> ]	15.282	15.123	1.0%

Una de las principales ventajas del FAM es su eficiencia computacional. En el análisis de la estructura de múltiples grados de libertad, el tiempo de cómputo fue de 12.21 segundos con el FAM, mientras que SAP2000 tardó 205.25 segundos, una diferencia de casi 17 veces. Esta eficiencia se debe a la formulación del FAM, que evita la actualización de la matriz de rigidez y en su lugar concentra la no linealidad en las articulaciones plásticas, permitiendo un análisis más ágil, convirtiéndolo en una alternativa atractiva.

El análisis de respuesta ante cargas eólicas pone de manifiesto otra ventaja crucial del FAM. En este caso, SAP2000 presentó dificultades de convergencia, integrando solo 11 segundos de un registro de 600 segundos tras tres horas de cálculo, con numerosas iteraciones nulas que obligaron a detener el análisis. Por el contrario, el FAM completó el análisis en 27.36 segundos, obteniendo resultados satisfactorios que cumplen con las demandas esperadas de la estructura. Este comportamiento se explica por la capacidad del FAM para evitar la actualización continua de la matriz de rigidez, lo que facilita la integración numérica en problemas de larga duración.

## CONCLUSIONES

Este trabajo presenta una metodología alternativa, y relativamente nueva, para realizar análisis estáticos y dinámicos inelásticos de estructuras sometidas a cargas sísmicas y eólicas. La metodología, denominada Método de Analogía de la Fuerza (FAM), se basa en el uso de desplazamientos inelásticos y la

evaluación de la matriz de rigidez una única vez al inicio del proceso, en contraste con los métodos tradicionales que requieren una actualización continua de esta matriz. Este procedimiento permite una reducción significativa en el tiempo de cálculo, mejorando la eficiencia computacional.

El FAM permite la consideración de distintos modelos de comportamiento no lineal de los materiales, como modelos bilineales, de flexión y cortante para elementos de concreto, de pandeo, y macromodelos de muros de concreto, lo que le otorga gran versatilidad. Además, esta metodología facilita el uso de sistemas de control activos y pasivos, lo que amplía su aplicabilidad en el diseño de estructuras inteligentes y en la reducción de la respuesta dinámica de las mismas.

Una de las contribuciones más destacadas de este trabajo es la propuesta de un esquema iterativo con alta velocidad de convergencia y de programación simple para el cálculo de las demandas inelásticas con el FAM. Este esquema no solo permite la integración rápida de la respuesta dinámica, sino que también posibilita la combinación de distintos modelos de comportamiento no lineal en una misma estructura. La versatilidad para trabajar con distintos modelos no lineales representa un aporte significativo en el ámbito del análisis de estructuras complejas.

La validación de la metodología se realizó mediante dos estudios de caso. El primero se enfocó en un sistema de un grado de libertad, mostrando que el FAM proporciona resultados comparables con los obtenidos a través del método de Newmark para sistemas no lineales, con diferencias menores al 1% en desplazamientos, velocidades y aceleraciones máximas. El segundo estudio abarcó una estructura de múltiples grados de libertad, donde los resultados obtenidos con el FAM se compararon con los de SAP2000 para excitaciones sísmicas y eólicas. La mayor diferencia observada fue en la distorsión de entrepiso, aunque la tendencia general de la distorsión fue consistente con la obtenida mediante SAP2000. En el análisis eólico el FAM completó el análisis en 27.36 segundos, mientras que SAP2000 presentó dificultades de convergencia, deteniéndose después de tres horas de cálculo y solo 11 segundos de integración.

Además de su precisión, la metodología destaca por su eficiencia computacional. Se verificó que el FAM reduce el tiempo de cálculo en análisis dinámicos complejos, alcanzando tiempos de cálculo hasta 17 veces menores que los obtenidos con SAP2000. Este aspecto resulta crucial para aplicaciones prácticas, donde la rapidez en la obtención de resultados es esencial.

En cuanto a su aplicabilidad en el control estructural, el FAM permite la incorporación de sistemas de control activos y pasivos, a través de la modificación de la ecuación de movimiento y su integración en la formulación variable estado, lo que posibilita el desarrollo de estructuras más eficientes y sostenibles. La reducción de la respuesta dinámica de la estructura mediante el control de vibraciones tiene un impacto directo en la optimización de los recursos materiales.

En trabajos futuros se aplicará el FAM en estructuras tridimensionales de concreto y de acero, sometidas a historias sintéticas de viento huracanado, tornado y de ráfagas descendentes, que son más agresivas que el viento sinóptico, además, de que presentarán novedosos modelos no lineales de comportamiento de los materiales y se incorporará el uso de sistemas para el control de la respuesta dinámica.

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece al CONAHCYT por el apoyo proporcionado por medio de la beca para realizar estudios de doctorado en el programa de Maestría y Doctorado de la UNAM. El segundo autor,

agradece a la Facultad de Ingeniería Civil de la UMSNH, por el apoyo proporcionado para la realización de este proyecto.

## REFERENCIAS

- Alvarez, R. J., y Birnstiel, C. (1969). Inelastic Analysis of Multistory Multibay Frames. *Journal of the Structural Division*, 95(11), 2477–2506. <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0002401>
- Aoyama, H. y Sugano T., (1968). A generalized inelastic analysis of reinforced concrete structures based on tests of members, *Recent Researches of Structural Mechanics, Uno-Shoten, Tokyo*, pp. 15-30.
- Bahar, H., y Bahar, A. (2018). A force analogy method ( FAM ) assessment on different static condensation procedures for frames with full Rayleigh damping. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 27(9), e1468. <https://doi.org/10.1002/tal.1468>
- Calofir, V., Nica, G. B., Stamatescu, G., y Arghira, N. (2019). Dynamic Nonlinear Modelling of Building Structure Using the Force Analogy Method. *2019 10th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS)*, 1068–1073. <https://doi.org/10.1109/IDAACS.2019.8924408>
- Calofir, V., Nica, B. G., y Pavel, F. (2020). A Nonlinear Model to Analyze the Structures Pounding Forces During Earthquakes. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 45(10), 8303–8314. <https://doi.org/10.1007/s13369-020-04633-0>
- Chajes, A. (1968). Inelastic Deflections of Beams. *Journal of the Structural Division*, 94(6), 1549–1565. <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0001980>
- Chao, S., y Loh, C. (2007). Inelastic response analysis of reinforced concrete structures using modified force analogy method. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 36(12), 1659–1683. <https://doi.org/10.1002/eqe.710>
- Chopra, A. K. (2012). *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. Cuarta ed. Prentice Hall.
- Clough R.W., Benuska K.L. y Wilson E.L., (1965). Inelastic earthquake response of tall buildings. *Proceedings of the 3er World Conference on Earthquake Engineering, New Zealand*, II, pp. 68-69.
- Giberson, M. F. (1969). Two Nonlinear Beams With Definitions of Ductility. *Journal of the Structural Division*, 95(2), 137–157. <https://doi.org/10.1061/JSDEAG.0002184>
- Hatzigeorgiou, G. D., y Beskos, D. E. (2011). Dynamic inelastic structural analysis by the BEM: A review. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(2), 159–169. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2010.08.002>
- Iancovici, M., Ionică, G., Pavel, F., Moța, F., y Nica, G. B. (2022). Nonlinear dynamic response analysis of buildings for wind loads. A new frontier in the structural wind engineering. *Journal of Building Engineering*, 47, 103708. <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2021.103708>
- Iancovici, M., y Nica, G. B. (2023). Time-Domain Structural Damage and Loss Estimates for Wind Loads: Road to Resilience-Targeted and Smart Buildings Design. *Buildings*, 13(3), 734. <https://doi.org/10.3390/buildings13030734>
- Li, G., Fahnestock, L. A., Li, H.-N., y Wang, S.-Y. (2012). Nonlinear Cyclic Modeling of Concentrically Braced Frames. *15th World Conference on Earthquake Engineering 2012 (15WCEE)*, Lisbon, Portugal.
- Li, G., y Li, H. (2011). Seismic response analysis of structure with energy dissipation devices using force analogy method. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 20(3), 291–313. <https://doi.org/10.1002/tal.541>
- Li, G., Li, H., y Zhang, Y. (2015). Displacement estimation of nonlinear structures using the force analogy method. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 24(1), 59–72. <https://doi.org/10.1002/tal.1154>

- Li, L., Liu, Q., y Li, H. (2011). Inelastic Structural Control Based on MBC and FAM. *Mathematical Problems in Engineering*, 2011(1), 460731. <https://doi.org/10.1155/2011/460731>
- Li, G., Zhang, Y., y Li, H.-N. (2013). Seismic Damage Analysis of Reinforced Concrete Frame Using the Force Analogy Method. *Journal of Engineering Mechanics*, 139(12), 1780–1789. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000618](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000618)
- Li, G., Zhang, Y., y Li, H. (2014a). Nonlinear seismic analysis of reinforced concrete frames using the force analogy method. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 43(14), 2115–2134. <https://doi.org/10.1002/eqe.2439>
- Li, G., Zhang, Y., y Li, H.-N. (2015). Nonlinear Seismic Analysis of Reinforced Concrete Bridges Using the Force Analogy Method. *Journal of Bridge Engineering*, 20(10), 04014111. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)BE.1943-5592.0000721](https://doi.org/10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0000721)
- Li, G., Zhang, F., Zhang, Y., y Li, H. (2015). Nonlinear hysteretic behavior simulation of reinforced concrete shear walls using the force analogy method. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 24(7), 504–520. <https://doi.org/10.1002/tal.1177>
- Li, G., y Wong, K. K. F. (2014). *Theory of Nonlinear Structural Analysis: The Force Analogy Method for Earthquake Engineering*. Primera edición. Wiley and Sons. ISBN: 978-1-118-71806-3.
- Lignos, D. G., y Krawinkler, H. (2011). Deterioration Modeling of Steel Components in Support of Collapse Prediction of Steel Moment Frames under Earthquake Loading. *Journal of Structural Engineering*, 137(11), 1291–1302. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000376](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000376)
- Linde, P., y Bachmann, H. (1994). Dynamic modelling and design of earthquake-resistant walls. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 23(12), 1331–1350. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290231205>
- Munteanu, R. I., Calofir, V., Iancovici, M., Nica, G. B., y Iliescu, S. S. (2020). Modelling of Structural Damage Caused by Seismic Pounding of Multi-Degree of Freedom Inelastic Structures. *2020 24th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC)*, 608–613. <https://doi.org/10.1109/ICSTCC50638.2020.9259756>
- Munteanu, R. I., Moța, F., Calofir, V., y Baci, C. (2022). New Approach to Nonlinear Dynamic Analysis of Reinforced Concrete 3D Frames; An Accurate and Computational Efficient Mathematical Model. *Applied Sciences*, 12(3), 1692. <https://doi.org/10.3390/app12031692>
- Nica, G. B., Calofir, V., y Corâci, I. C. (2018). A State Space Formulation for the Evaluation of the Pounding Forces During Earthquake. *Mathematical Modelling in Civil Engineering*, 14(2), 37–49. <https://doi.org/10.2478/mmce-2018-0006>
- Nica, G. B., Munteanu, R. I., Calofir, V., y Iancovici, M. (2022). Modelling nonlinear behavior of 3 D frames using the Force Analogy Method. *Structures*, 35, 1162–1174. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.08.097>
- Ningthoukhongjam, S. S., y Singh, K. D. (2020a). Mass irregularity effect on seismic response of moment-resisting steel frame by nonlinear time history analysis using force analogy method. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 30(2), e1823. <https://doi.org/10.1002/tal.1823>
- Ningthoukhongjam, S. S., y Singh, K. D. (2020b). Inelastic Time History Analysis of Mass Irregular Moment Resisting Steel Frame Using Force Analogy Method. *Advances in Structural Vibrations. Lecture Notes in Mechanical Engineering*, pp. 171–183, [https://doi.org/10.1007/978-981-15-5862-7\\_15](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5862-7_15)
- Ningthoukhongjam, S. S., y Singh, K. D. (2021). Analysis of Mid-Rise Moment Resisting Steel Frames by Nonlinear Time History Analysis using Force Analogy Method. *Journal of The Institution of Engineers (India): Series A*, 102(4), 901–918. <https://doi.org/10.1007/s40030-021-00577-2>
- NTC-DS-17 (2017). Normas técnicas complementarias para el diseño por sismo, Gaceta Oficial de la Ciudad de México, Vigésima época, No. 220 Bis, diciembre.
- Safaei, S., Taslimi, A., y Tehrani, P. (2019). A study on the accuracy of force analogy method in nonlinear static analysis. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 28(13), e1654. <https://doi.org/10.1002/tal.1654>
- SAP2000 (2009). Computers and Structures, Inc. Versión 14.1.

- Toloue, I., Liew, M. S., Harahap, I. S. H., y Lee, H. E. (2018). A novel approach to enhance the accuracy of vibration control of Frames. *E3S Web of Conferences*, 34, 01027. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20183401027>
- Toloue, I., Liew, M. S., Harahap, I. S. H., y Lee, H. E. (2020). Experimental evaluation of force analogy method (FAM) by element type. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 19(1), 137–147. <https://doi.org/10.1007/s11803-020-0552-3>
- Wang, Q.-A., Wu, Z.-Y., y Wang, Y. (2019). Multi-dimensional fragility analysis considering structural cumulative plastic dissipation energy and its application to a NEES frame structure. *13th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering, ICASP13, Seoul, South Korea*, pp. 26-30, <https://doi.org/10.22725/ICASP13.133>
- Wong, K. K. (2008). Seismic Energy Dissipation of Inelastic Structures with Tuned Mass Dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 134(2), 163–172. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2008\)134:2\(163\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2008)134:2(163))
- Wong, K. K. F. (2011). Seismic energy analysis of structures with nonlinear fluid viscous dampers—Algorithm and numerical verification. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 20(4), 482–496. <https://doi.org/10.1002/tal.602>
- Wong, K. K. F., y Harris, J. L. (2010). Nonlinear Modal Analysis and Superposition. *Proceedings of 9th US National and 10th Canadian Conference Earthquake Engineering*, pp. 25-29.
- Wong, K. K. F., y Harris, J. L. (2012). Seismic damage and fragility analysis of structures with tuned mass dampers based on plastic energy. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 21(4), 296–310. <https://doi.org/10.1002/tal.604>
- Wong, K. K., y Johnson, J. (2009). Seismic Energy Dissipation of Inelastic Structures with Multiple Tuned Mass Dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 135(4), 265–275. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2009\)135:4\(265\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:4(265))
- Wong, K. K. F., y Pang, M. (2007). Energy density spectra in actively controlled inelastic structures—Application. *Structural Control and Health Monitoring*, 14(2), 279–300. <https://doi.org/10.1002/stc.158>
- Wong, K. K. F., y Speicher, M. S. (2015). Dynamic effects of geometric nonlinearity on inelastic frame behavior for seismic applications. *Proceeding of the Annual Stability Conference Structural Stability, Nashville, Tennessee*, pp. 24-27.
- Wong, K. K. F., y Wang, Y. (2001). Probabilistic structural damage assessment and control based on energy approach. *The Structural Design of Tall Buildings*, 10(4), 283–308. <https://doi.org/10.1002/tal.186>
- Wong, K. K. F., y Wang, Y. (2003). Energy-based design of structures using modified force analogy method. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 12(5), 393–407. <https://doi.org/10.1002/tal.234>
- Wong, K. K. F., y Wang, Z. (2007a). Seismic analysis of inelastic moment-resisting frames Part I: Modified force analogy method for end offsets. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 16(3), 267–282. <https://doi.org/10.1002/tal.314>
- Wong, K. K. F., y Wang, Z. (2007b). Seismic analysis of inelastic moment-resisting frames Part II: Energy dissipation in deformable panel zones. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 16(3), 283–299. <https://doi.org/10.1002/tal.315>
- Wong, K. K. F., y Yang, R. (1999). Inelastic Dynamic Response of Structures Using Force Analogy Method. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(10), 1190–1199. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:10\(1190\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:10(1190))
- Wong, K. K. F., y Yang, R. (2000). Hybrid Control of Inelastic Structures during Earthquake. *Key Engineering Materials*, 177–180, 781–786. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.177-180.781>
- Wong, K. K. F., y Yang, R. (2001a). Effectiveness of structural control based on control energy perspectives. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30(12), 1747–1768. <https://doi.org/10.1002/eqe.76>

- Wong, K. K. F., y Yang, R. (2001b). Evaluation of response and energy in actively controlled structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30(10), 1495–1510. <https://doi.org/10.1002/eqe.74>
- Wong, K. K. F., y Wang, Y. (2001). Energy-based damage assessment on structures during earthquakes. *The Structural Design of Tall Buildings*, 10(2), 135–154. <https://doi.org/10.1002/tal.174>
- Wong, K. K. F., y Yang, R. (2003). Predictive instantaneous optimal control of inelastic structures during earthquakes. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 32(14), 2179–2195. <https://doi.org/10.1002/eqe.322>
- Wong, K. K. F., y Zhao, D. (2005a). A numerical study based on sequential procedure for optimally placing active controllers. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 14(4), 279–297. <https://doi.org/10.1002/tal.263>
- Wong, K. K. F., y Zhao, D. (2005b). Effectiveness of inelastic structural control based on elastic displacement and energy. *Structural Control and Health Monitoring*, 12(1), 47–64. <https://doi.org/10.1002/stc.51>
- Wong, K. K., y Zhao, D. (2007). Uncoupling of Potential Energy in Nonlinear Seismic Analysis of Framed Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(10), 1061–1071. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2007\)133:10\(1061\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:10(1061))
- Yang, R., Wong, K. K. F., y Pan, T.-C. (2004). Predictive inelastic state control of modern structures during earthquakes. *Structural Control and Health Monitoring*, 11(4), 291–309. <https://doi.org/10.1002/stc.44>
- Zhang, X., Wong, K. K. F., y Wang, Y. (2007). Performance assessment of moment resisting frames during earthquakes based on the force analogy method. *Engineering Structures*, 29(10), 2792–2802. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2007.01.024>
- Zhang, Y., Li, H.-N., y Li, G. (2016). Seismic Performance Assessment of Offshore Reinforced Concrete Bridges Using the Force Analogy Method. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 16(05), 1550012. <https://doi.org/10.1142/S0219455415500121>
- Zhao, D., y Wong, K. K. (2006). New Approach for Seismic Nonlinear Analysis of Inelastic Framed Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 132(9), 959–966. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2006\)132:9\(959\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2006)132:9(959))
- Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L., (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*, Sexta ed. Oxford, Elsevier-Butterworth-Heinemann.