

ZONACIÓN SÍSMICA EN PROBLEMAS NO REDUCIBLES A UNA DIMENSIÓN

Jaime García-Pérez y Emilio Rosenblueth
Instituto de Ingeniería, UNAM

RESUMEN

Se estudia la zonación sísmica considerando dos criterios de diseño. En el primero, los reglamentos requieren que las estructuras sean diseñadas para coeficientes no menores que ciertos valores que se especifican. La zonación óptima es entonces aquella que minimiza la esperanza del valor presente de los costos iniciales de todas las estructuras que se construirán en la región que se zonifica. En el segundo criterio, se diseña de tal forma que se minimice el valor presente del costo total. Llamaremos a estos criterios zonación para la minimización del costo inicial y total respectivamente. Se demuestra que bajo ciertas condiciones, las fronteras coinciden con curvas isoparamétricas y el problema se puede resolver en una dimensión. Abordamos aquí también los problemas que no pueden reducirse a una sola dimensión. Tratamos la microzonación como un caso particular de la zonación. Se proponen diferentes métodos para resolver los distintos problemas. El trabajo termina con ejemplos ilustrativos.

ABSTRACT

We consider two design criteria to study seismic zoning. In the first, codes require that structures be designed for some specified values. Zoning is then optimal when it minimizes the expected present value of the initial costs of all structures to be built on the region being zoned. In the second criterion, it is designed such that the present value of the total cost is minimized. We will call these criteria zonation for the initial and total cost minimization respectively. It is shown that under certain conditions, the boundaries coincide with isoparametric curves and the problem may be solved in one dimension. We also deal with problems not reducible to a single dimension. We treat microzoning as particular case of zoning. Different methods are proposed to solve the various kinds of problems. The work ends with some illustrative examples.

INTRODUCCIÓN

En artículos anteriores (Rosenblueth y García-Pérez, 1994; García-Pérez y Rosenblueth, 1994a y b) justificamos la práctica de zonación sísmica y abordamos el problema de zonificar por sismo una región en forma óptima cuando este problema puede reducirse a una dimensión y es entonces formalmente igual a la optimación de un catálogo de productos estandarizados definidos por un solo parámetro. El primer artículo lidia con el problema general. El segundo de dichos trabajos se refiere al caso en que las normas de las que la zonación forma parte marcan que ninguna estructura debe diseñarse para un coeficiente menor que el especificado en un mapa con curvas isoparamétricas, así que, al zonificar, casi todas las estructuras quedan sobrediseñadas. El problema consiste en hallar las fronteras interzonales que minimicen el desperdicio causado por la zonación. En el tercero se busca establecer tanto las fronteras que delimitan óptimamente las zonas como los coeficientes de diseño que resultan óptimos en las zonas, considerando tanto el costo de la estructura como el ocasionado por los sismos; con este enfoque unas estructuras quedan sobrediseñadas y las demás subdiseñadas; aun así la zonación implica un sobre costo global, si bien muy inferior al desperdicio que introduce la primera práctica.

En el presente trabajo recordaremos las condiciones en que cabe la reducción a un problema unidimensional, así como los métodos eficientes que son aplicables en una dimensión, y extendemos los métodos de zonación óptima a problemas que deben tratarse en dos dimensiones, tanto cuando se zonifican de manera que en cada zona rige la condición más desfavorable como cuando en la zonación se considera el diseño para la minimización del costo total.

CONDICIONES PARA REDUCIR A UNA DIMENSIÓN

En los artículos mencionados hicimos notar que los problemas de zonación óptima pueden reducirse a una dimensión cuando se cumplen ciertas condiciones. Estas son las mismas cuando se ha de diseñar en cada zona para la con-

dición más desfavorable que allí rige (*minimización del costo inicial*) que cuando se trata de minimizar los costos (incluyendo el inicial, el de mantenimiento y los daños por sismo) de todas las estructuras que se construyan en la región (*minimización del costo total*).

Supongamos inicialmente que en la región por zonificar se construirán estructuras de un solo tipo, de manera que el costo inicial C de una estructura depende únicamente del coeficiente de cortante basal c para el que se la diseña y es función creciente de este. En zonación para minimización del costo inicial este es el único costo unitario que interesa, y denominaremos w a C . En diseño para la minimización del costo total interesa también la esperanza D del valor presente de las pérdidas que experimentará la estructura por sismo. Esta dependerá de c y de un funcional Z de la sísmicidad del sitio donde se construirá la estructura, es decir un funcional de las demandas de coeficiente de corte basal (digamos, ordenadas del espectro de pseudoaceleraciones expresadas en términos de la aceleración de la gravedad), de manera que D sea función decreciente de c y creciente de Z . Partiremos de que se ha trazado un mapa de la región con curvas isoparamétricas de Z en diseño para minimización del costo total, pero correspondientes en diseño para minimización del costo inicial, a valores constantes del coeficiente mínimo para el que debería diseñarse, al cual llamaremos también Z , y que sería el coeficiente de diseño si no se zonificara. Llamaremos *isosistas* a estas curvas isoparamétricas. En ambos tipos de diseño cada curva de Z constante es también de w constante. En el mapa se habrán trazado curvas de valores constantes de la esperanza ψ del valor presente del número de estructuras que se construirán por unidad de área y por unidad de tiempo. Dividiremos la región en zonas a las que denominaremos k , $k=1, \dots, K$ y tomaremos K como un dato. Las estructuras de la zona k se diseñarán para un coeficiente constante c_k . Interesa calcular cada c_k que minimice la esperanza del valor presente del costo de todas las estructuras de la zona k , $W_k = \int_k \phi w(c_k, Z) dA$, donde ϕ representa la esperanza del valor presente del número de estructuras que se construirán por unidad de área, A significa área, y definir las fronteras

entre las zonas de manera que resulte mínimo el costo total $W = \sum_{k=1}^K W_k$ en la región.

En diseño para minimizar el costo inicial, c_k es el valor máximo de Z en la zona k , de manera que podemos escribir $w(c_k, Z) = w(c_k)$, costo unitario al que llamaremos u_k ; en consecuencia, $U_k = u_k \int_k \phi dA$. En diseño para minimización del costo total, c_k debe calcularse explícitamente y no cabe la simplificación mencionada para minimización del costo inicial.

En estas condiciones las fronteras interzonales coinciden con *isosistas* y el problema de zonación puede reducirse a uno unidimensional, en que conviene tomar $A_k = A(c_k)$ como el área en que el coeficiente de diseño no excede de c_k , así que el área de la zona k es $A_k - A_{k-1}$, con $A_0 = 0$ y tomar $A(Z)$ como el área en que el parámetro que define la sismicidad no excede de Z . El problema se torna formalmente igual al de optimación de catálogos de productos estandarizados definidos por un solo parámetro; Z hace las veces del tamaño o capacidad demandado, c_k las del k -ésimo tamaño suministrado, w las del costo unitario del producto y, si definimos $f(Z)$ como la integral de ϕ a lo largo de la isosista de Z , f hace las veces de la frecuencia de uso o esperanza del valor presente del número de artículos que se demandarán por unidad de Z .

La reducción a una dimensión es también aplicable al caso en que se construirán diversos tipos $i=1, \dots, n$ de estructura, a cada uno de los cuales corresponde un mapa con curvas de Z_i y de ϕ_i , siempre que se cumplan dos condiciones: que los Z_i sean funciones monótonamente crecientes unos de otros, y que los cocientes f_i/f_j sean constantes en cada isosista Z . Si se cumple únicamente la primera de estas condiciones, las fronteras interzonales seguirán coincidiendo con isosistas pero habrá que tratar el problema en dos dimensiones. Las curvas isoparamétricas de Z_i coinciden para los diversos tipos pero corresponden a distintos tipos de Z_i constante.

Cuando se cumplen ambas condiciones podemos concebir un tipo de estructura cuyo costo es el promedio pesado de los que co-

rresponden a tipos que se construirán. Para ello definimos $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i$ y $w = \sum_{i=1}^n \phi_i w_i / \phi$. De aquí que el problema todavía pueda tratarse como unidimensional.

ZONACIÓN PARA DISEÑO DE MINIMIZACIÓN DEL COSTO INICIAL

En problemas reducibles a una dimensión

Con el criterio de minimización del costo inicial, en cada zona se establecen coeficientes iguales a los máximos que se especifican cuando no se ha zonificado, y por tanto, es grande el desperdicio que resulta de la zonación. Para la solución de este caso se puede recurrir a los siguientes métodos (García-Pérez y Rosenblueth 1994a).

Procedimientos paso a paso

Si $u(A)$ es continua con derivada continua positiva, también lo es su inversa $A(u)$. Si $p(u) = (dA/du)$, entonces $f[A(u)]$ es la demanda por unidad de u . Entonces $U = \sum_{k=1}^K B_k u_k$ donde

$B_k = \int_{u_{k-1}}^{u_k} p(u) du$. Una condición necesaria para que U sea mínima es $\partial U / \partial u_k = 0$, $k=1, \dots, K$, con $u_k = u^+ = u(A^+)$, donde u^+ es el máximo valor en la región R que se va a zonificar y A^+ representa el área de la región, pero

$$\frac{\partial U}{\partial u_k} = B_k - (u_{k-1} - u_k) p_k \quad (1)$$

Sustituyendo $\partial U / \partial u_k = 0$ se obtiene la siguiente relación recursiva:

$$u_{k+1} = u_k + B_k / p_k \quad (2)$$

donde $p_k = p(u_k)$. De aquí se obtiene el siguiente procedimiento:

- 1 Suponer u_1
- 2 Calcular B_1 y p_1
- 3 Calcular u_2 usando la ec 2

- 4 Repetir pasos 2 y 3 aumentando los subíndices en 1 hasta alcanzar u_K
- 5 Comparar u_K con u^+ ; si la diferencia no es lo suficientemente pequeña, repetir los pasos 1-5.

Alternativamente, se puede introducir una variable x tal que $dx=f(A)dA$. Entonces

$$U = \sum_{k=1}^K (x_k - x_{k-1}) u_k \quad (3)$$

donde $x_0=x(0)$; entonces,

$$\frac{\partial U}{\partial x_k} = u_k + (x_k - x_{k-1}) \frac{du_k}{dx_k} - u_{k-1} \quad (4)$$

que debe ser igual a cero. Por tanto,

$$\frac{du_k}{dx_k} = \frac{u_{k+1} - u_k}{x_k - x_{k-1}} \quad (5)$$

Esta relación sugiere el siguiente procedimiento:

- 1 Suponer x_1

- 2 Calcular u_1 y du_1/dx_1
- 3 Encontrar $u_2=u_1+(x_1-x_0)du_1/dx_1$ y calcular x_2
- 4 y 5 Como en el proceso mencionado.

Una interpretación de la ec 5 se muestra en la fig 1, basada en el hecho de que $du/dx \geq 0$. La hipotenusa del triángulo dibujado con líneas gruesas se hace paralela a la tangente a la curva $u(x)$ en $x=x_k$. Su pendiente es por tanto du/dx igual a $(u_{k+1}-u_k)/(x_k-x_{k-1})$. De lo anterior se obtiene la construcción gráfica descrita en la fig 2, para $K=5$. Un valor inicial u_1 define los puntos 1 y 1'. La línea 12 se dibuja de 1 con la pendiente de la curva en el punto 1'. El punto 2 se encuentra en la intersección de 12 con la vertical que pasa por 1'. El procedimiento se repite, generando el polígono 12345. La diferencia Δ_5 debe ser cero (prácticamente); si es necesario los pasos se repiten ensayando una nueva u_1 .

Perturbaciones

Supóngase que estimamos las fronteras entre las zonas. Si nuestras estimaciones fueran correctas, entonces de acuerdo con la ec 1 deberíamos encontrar $B_k+p_k u_k - p_k u_{k+1}$ igual a cero.

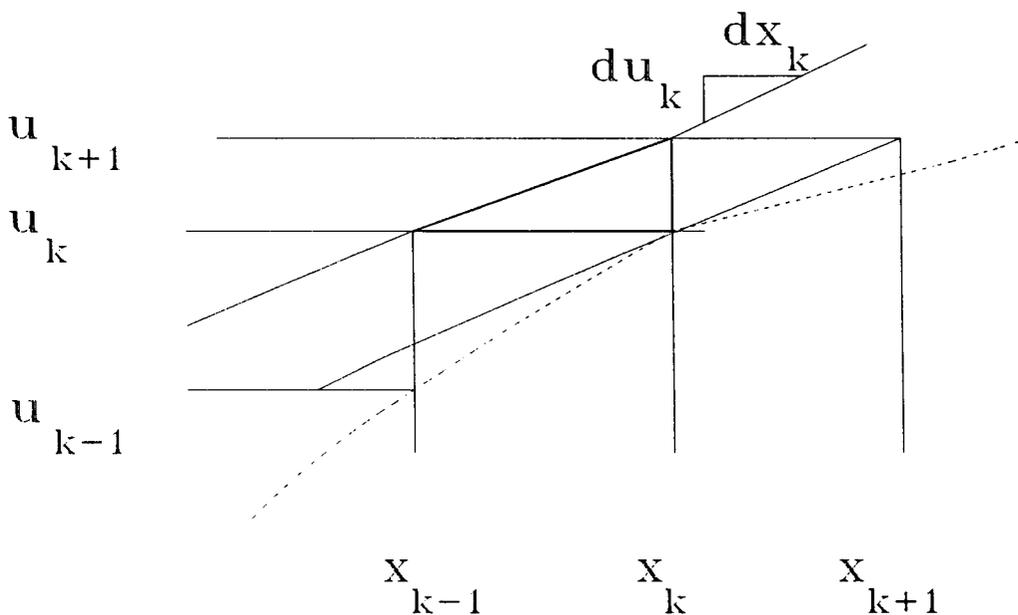


Fig 1. Interpretación gráfica del segundo método paso a paso

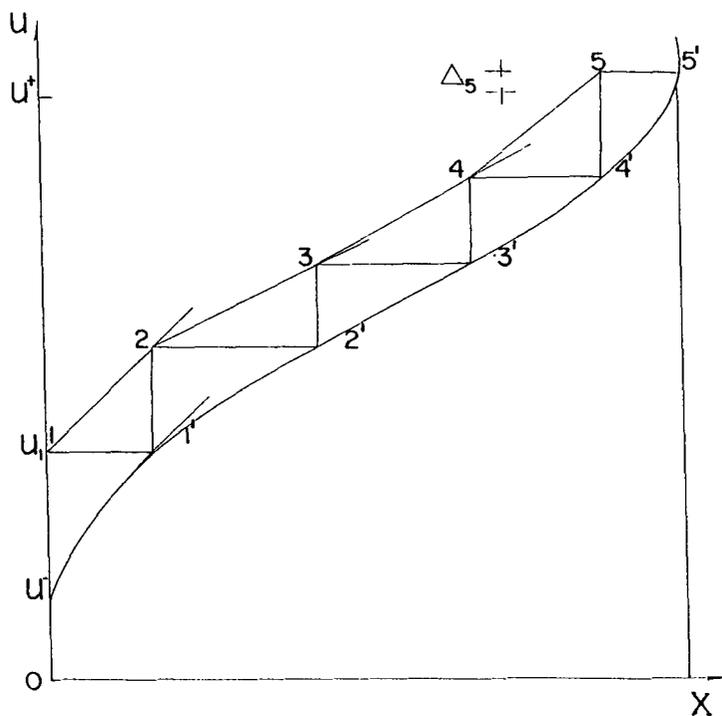


Fig 2. Procedimiento gráfico para 5 tamaños óptimos

Cualquier valor que tome esta función en la frontera k constituye un error que designaremos como ϵ_k :

$$B_k - (u_{k+1} - u_k)p_k = \epsilon_k \quad (6)$$

Esto sugiere el uso de un procedimiento de perturbaciones. Si introducimos cambios Δu_k en las u_k y suponemos una relación lineal con las ϵ_k , la ec 6 da $N-1$ ecuaciones de la forma

$$p_{k-1}\Delta u_{k-1} + [(u_{k+1} - u_k)p'_k - 2p_k]\Delta u_k + p_k\Delta u_{k+1} = -\epsilon_k \quad (7)$$

de donde se pueden calcular las Δu_k requeridas para cancelar los errores ϵ_k . Aquí $p'_k = \partial p_k / \partial u_k$. Esta matriz de coeficientes es tridiagonal. Puesto que la supuesta linealidad no es exacta, puede ser necesario repetir el procedimiento.

Un procedimiento similar puede realizarse usando la ec 4, con lo que se obtiene

$$(x_k - x_{k-1}) \frac{du_k}{dx_k} - (u_{k-1} - u_k) = \epsilon_k \quad (8)$$

De aquí,

$$[(x_k - x_{k-1})u_k + 2u_k]\Delta x_k - 2u_{k-1}\Delta x_{k-1} = -\epsilon_k \quad (9)$$

La selección del procedimiento se basa en la facilidad de cálculo de las distintas variables para el problema que se está tratando.

En problemas no reducibles a una dimensión

Por sencillez expondremos métodos eficientes para resolver estos problemas suponiendo que en la región de interés sólo se construirán dos tipos de estructura (por ejemplo, tipos cuyas curvas isoparamétricas no son coincidentes). La generalización a cualquier número de tipos es inmediata. También lo es a situaciones en que el costo unitario de cada tipo es función creciente, no necesariamente aditiva, no solo de un coeficiente sino de varios.

Consideraremos la cantidad

$$\zeta_{kl} = \sum_{i=1}^2 (u_{ik} - u_{il})\phi_i \quad \text{en que } k \text{ y } l \text{ identifican dos zonas contiguas. Comencemos por el caso}$$

en que $c_{1k} < c_{1l}$ y $c_{2k} < c_{2l}$. Dondequiera que $\phi_1 + \phi_2 > 0$ tendremos $\zeta_{kl} < 0$. Con referencia a la fig 3, digamos que para delimitar las zonas k y l hemos postulado la línea gruesa de trazo continuo para la cual se cumplen las desigualdades enunciadas entre los coeficientes de diseño y por lo demás es arbitraria. La línea postulada pasa por valores variables de Z_1 y Z_2 , tales que $Z_{1k} = \max Z_1 = c_{1k}$ y $Z_{2k} = \max Z_2 = c_{2k}$. Si movemos la frontera hasta la línea de raya y punto, que coincide segmentalmente con las isosistas Z_{1k} y Z_{2k} , entonces el área comprendida entre esta línea y la frontera postulada habrá pasado de la zona l a la k y por tanto verá sus coeficientes de diseño disminuidos de c_{il} a c_{ik} , así que el costo total de las estructuras en la región habrá pasado de U a $U + \int \zeta_{kl} dA$ (salvo en el caso trivial $\phi_1 = \phi_2 = 0$, en que es irrelevante la posición de la frontera dentro del área considerada), donde la integral se extiende al área entre las dos líneas de trazo grueso, y la de raya y punto constituirá una mejor solución que la postulada. En estas circunstancias, cualquiera que sea la frontera que postulemos, siempre encon-

traremos una mejor, constituida por segmentos de isosistas de ambos tipos de estructura. De aquí que las fronteras óptimas deben estar formadas por tales segmentos.

De nuevo con referencia a la fig 3, adoptemos fronteras como las descritas, conservemos fijas las porciones de estas que coinciden con isosistas del segundo tipo de estructuras y movamos el segmento de la frontera entre k y l que coincide con una isosista de las estructuras tipo 1, de manera que pasemos de Z_{1k} a $Z_{1k} + dZ$, y por tanto de u_{1k} a $u_{1k} + du_1$. Con ello asignamos a la zona k la superficie sombreada, de área dA , la cual quitamos de la zona l . Llamemos $k+1$ a l . El valor de $F_{ik} - F_{i,k-1}$ se ve incrementado en $dF_i = f_i dA$ (donde ahora f_i es la integral de ϕ_i a lo largo del segmento cuya posición modificamos), cantidad en que disminuye $F_{1,k+1} - F_{1,k}$, mientras que $u_{1,k}$ aumenta en du_1 , y $u_{2,k}$ no se afecta. Si la frontera señalada con raya y punto fuera óptima, la suma de los costos de todas las estructuras de la región sería estacionaria con respecto a esta modificación en un segmento de la frontera. Por tanto,

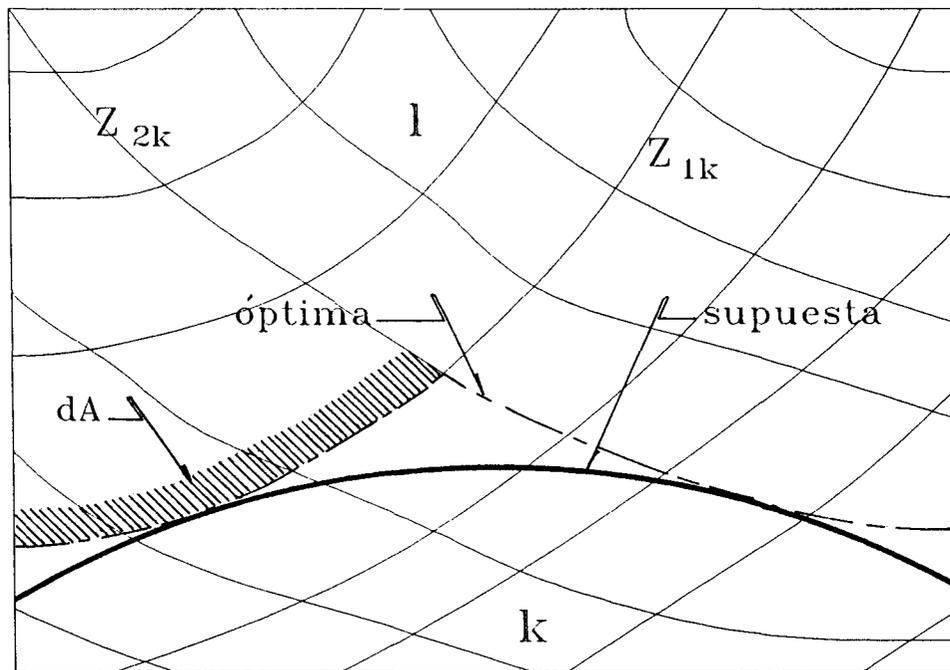


Fig 3. Fronteras para diseño de minimización del costo inicial con dos tipos de estructura, $Z_{ik} < Z_{il}$

dado que solo se modifican u_k y u_{k+1} , si hacemos $u_k=(F_{1k}u_{1k}+F_{2k}u_{2k})/F_k$, $F_k=F_{1k}+F_{2k}$, debe satisfacerse $(F_k-F_{k-1})u_k+(F_{k+1}-F_k)u_{k+1}=(F_k-F_{k-1}+f_1dA_1)(u_k+du)+(F_{k+1}-F_k-f_1dA_1)u_{k+1}=0$, de donde

$$\frac{du}{f_1dA_1} = \frac{u_{k+1}-u_k}{F_k-F_{k-1}} \quad (10)$$

Reconocemos en esta expresión la ec 5 que habíamos hallado al plantear el método gráfico para problemas unidimensionales. Por consiguiente si los tramos de las fronteras que coinciden con isosistas para el tipo 2 fueran los correctos, podríamos plantear el siguiente procedimiento:

- 1 Elijanse valores tentativos de u_{jk}
- 2 Usando cualquiera de los métodos aquí desarrollados, encuéntrase las u_{2k} óptimas que corresponden a u_{jk} ; calcúlese U
- 3 Repítase con otro conjunto de valores tentativos de u_{jk} ; escójase el conjunto que nos dé el mínimo valor de U .

Como estos tramos no necesariamente son los buenos, se propone el siguiente procedimiento iterativo, alternando ciclos de optimización para $i=1$ y 2 :

- 1 Por iteración, intercambiando cada vez los índices 1 y 2, obtenemos la primera aproximación.
- 2 Exploramos qué movimientos de fronteras (es decir reasignación de celdas a zonas) nos minimizan U .

- 3 Escójase el conjunto que nos dé el valor mínimo de U .

Se hace notar que el método de perturbaciones modificado es más eficiente si no espera uno lograr convergencia satisfactoria para $i=2$ sino que alterna, es decir, si no trabaja uno con cada valor de i hasta lograr una convergencia satisfactoria antes de pasar al otro valor de i , sino en cada ciclo se alternan ambos valores de i .

Con fines ilustrativos consideremos el ejemplo muy hipotético de la fig 4. Se trata de una región cuadrada de una unidad por lado. Las figs 4a y 4b muestran respectivamente curvas de Z_1 constante y de Z_2 constante. Supondremos que u_i es función lineal de c_i . Estos costos unitarios crecen linealmente, con iguales pendientes. En este caso las fronteras coinciden con isosistas, cualquiera que sea la variación de ϕ_1 y ϕ_2 , pues tanto u_1 como u_2 alcanzan su máximo en la esquina superior derecha de cada zona. Digamos que se busca dividir la región en dos zonas. La frontera será entonces como en la fig 4c. Por sencillez supondremos $\phi_1=\phi_2=1$, con lo que la zona resulta cuadrada.

Para aplicar la ec 10 dejando y fija calculamos $\partial u/\partial F_1=1/y$, $u_{11}=x$, $u_{21}=y$, $u_{12}=u_{22}=1$, $F_{11}=F_{21}=xy$, así que

$$\frac{1}{y} = \frac{2-x-y}{xy} \quad (11)$$

de donde,

$$x = (2-y)/2 \quad (12)$$

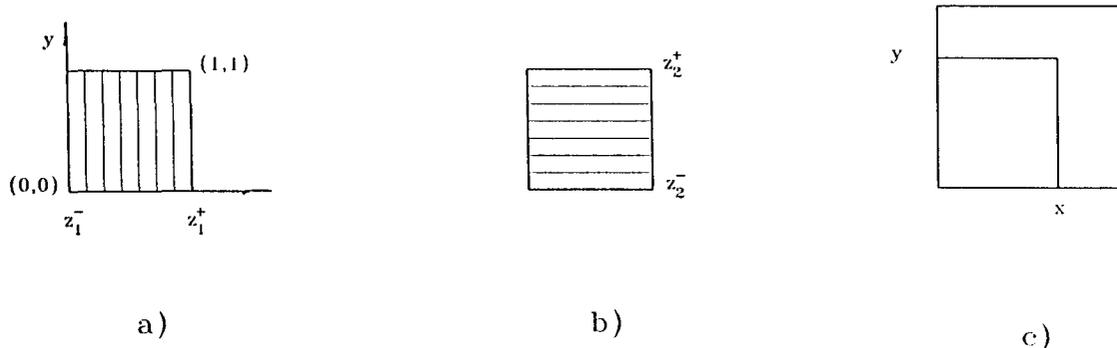


Fig 4. Ejemplo de procedimiento iterativo a), b) curvas isoparamétricas y c) frontera óptima

mientras que, cuando dejamos x fija

$$x = (2-x)/2 \quad (13)$$

Comenzamos por estimar $y_0=0.5$ y calculamos sucesivamente $x_1=0.75$, $y_1=0.625$, $y_2=0.65625$. Con los tres primeros valores de y la fórmula de Aitken nos da la respuesta exacta, $y=2/3$; y , de acuerdo con la ec 12, $x=2/3$.

La situación en que ζ_{kl} no cambia de signo en el área comprendida entre las isosistas pertinentes puede también presentarse cuando $c_{1k} < c_{1l}$ pero $c_{2k} > c_{2l}$. Con referencia a la fig 5, si $\zeta_{kl} > 0$ en el área sombreada, toda frontera dentro de esta área preserva los coeficientes de c_{1l} y c_{2k} , la frontera óptima con los coeficientes de diseño c_{1l} y c_{2k} es como se muestra con línea de raya y punto. Si, en cambio, en el área sombreada $\zeta_{kl} < 0$, la frontera con estos coeficientes sería como en la fig 6. Asimismo puede suceder que ζ_{kl} cambie de signo en alguna línea entre las isosistas mencionadas, sea que el cambio ocurra en $\zeta_{kl}=0$ o en una discontinuidad de ζ_{kl} . En condiciones como las de

la fig 5 o de la fig 6 es aplicable el método iterativo que describimos en relación con la fig 3.

Ahora bien, cualquier desplazamiento impuesto en la frontera entre estas isosistas modifica u en ζ_{kl} integrada sobre el área en que se impone el desplazamiento. Por consiguiente si la frontera es óptima, u debe ser estacionaria con respecto a estos desplazamientos, así que una frontera que es óptima dados los coeficientes z_{1l} y z_{2k} debe coincidir con la línea en que ζ_{kl} cambia de signo. En estas condiciones solo cabe explorar zonaciones con un par de coeficientes para cada zona, calcular u para cada posible combinación y elegir la que minimice u . El número de posibilidades es limitado, pues en la práctica se habrán discretizado las c_{ik} ya que no se especificarán coeficientes con más de dos cifras decimales, digamos. Si el lugar geométrico de los cambios de signo de ζ_{kl} define lo que podemos llamar los litorales de unas islas, como en la fig 7, entonces el interior de estas ha de asignarse a una de las zonas, como en el caso de la figura.

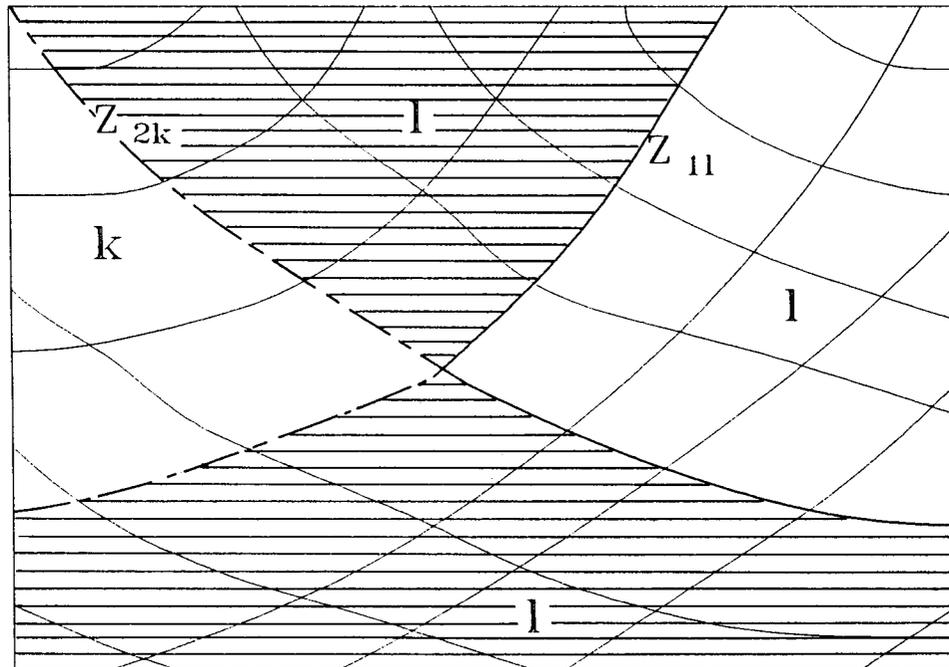


Fig 5. Frontera óptima para coeficientes de diseño dados, $\zeta_{kl} > 0$

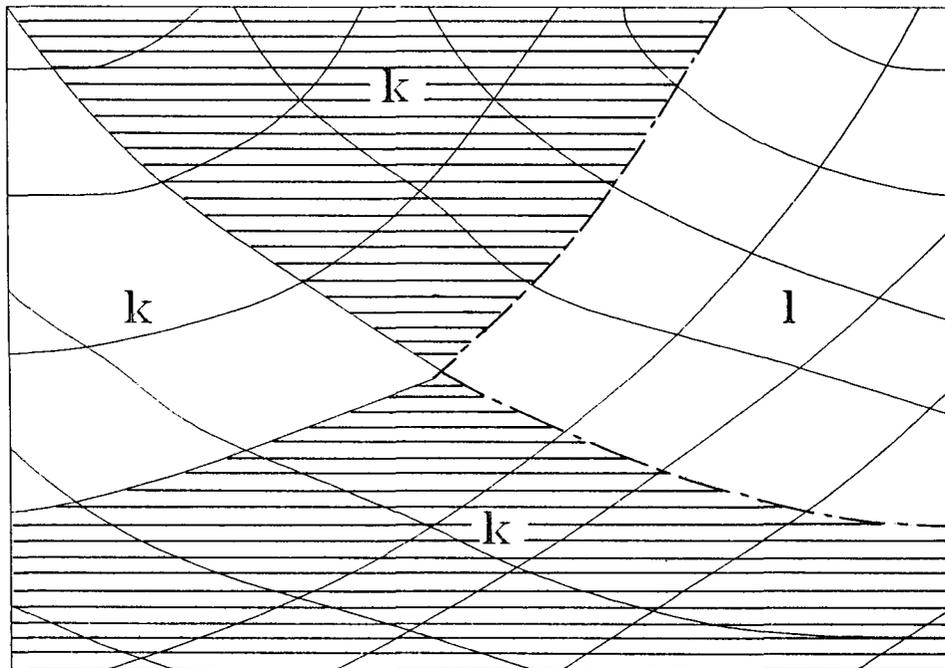


Fig 6. Frontera óptima para coeficientes de diseño dados, $\zeta_{kl} < 0$

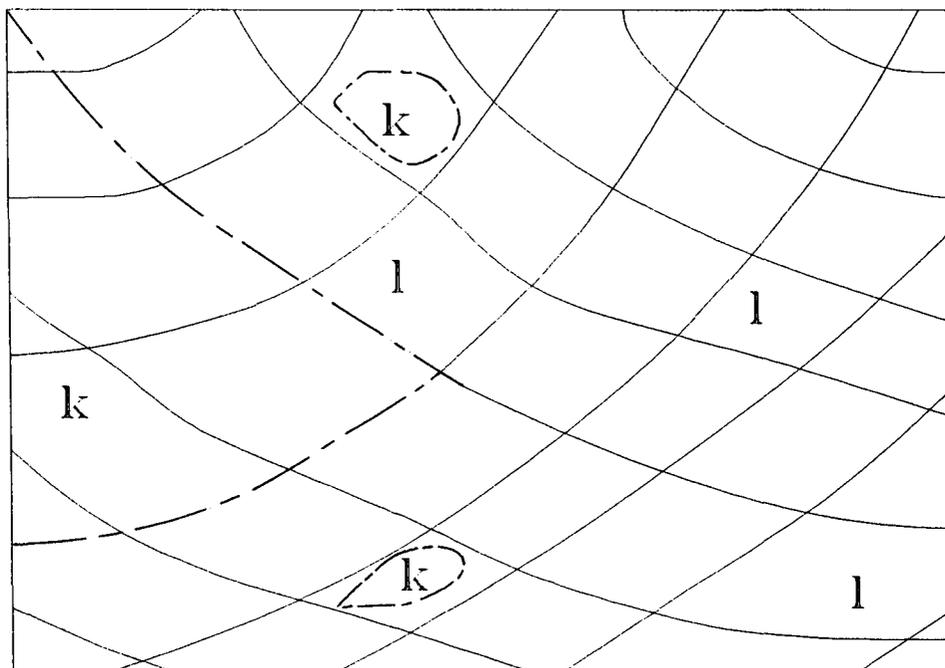


Fig 7. Fronteras óptimas para cambios de signo en ζ_{kl}

Puede suceder que en toda la región de interés las fronteras óptimas coincidan segmentalmente con isosistas tales que $c_{1k} < c_{1l}$ cuando $c_{2k} < c_{2l}$, o en toda ella con isosistas tales que $c_{1k} < c_{1l}$ cuando $c_{2k} < c_{2l}$ o finalmente que gobierne la condición de cambio de signo ζ_{kl} . Asimismo pueden presentarse circunstancias en que en una parte de la región rijan una de estas condiciones y en otras partes rijan otra u otras. En la práctica habrá que explorar tales circunstancias comparando los valores de u que resulten.

ZONACIÓN PARA DISEÑO DE MINIMIZACIÓN DEL COSTO TOTAL

En problemas reducibles a una dimensión

En cada zona se especificarán coeficientes y fronteras interzonales, de tal forma que minimicen la esperanza del valor presente del costo total. Para la solución se recurre a los siguientes procedimientos (García-Pérez y Rosenblueth 1994b):

Procedimiento paso a paso

Cuando ϕw es una función continua de A ,

- 1 Estimar c_1
- 2 Igualando $\partial W_1 / \partial c_1$ a cero calcular los valores de A_1 para el que c_1 es óptimo
- 3 Calcular $w(c_1, A_1)$
- 4 Calcular c_2 de tal forma que $w(c_2, A_1) = w(c_1, A_1)$
- 5 Repetir pasos 1-5 aumentando los subíndices en uno cada vez hasta alcanzar $w(c_k, A_k)$; si A_k está suficientemente cerca del valor de A asociado con w^+ el problema está resuelto; de otra forma se repite el proceso comenzando con una nueva c .

Lo anterior supone que $w(c_{k+1}, A_k) = w(c_k, A_k)$ tiene una sola raíz c_{k+1} . Cuando existen más raíces debemos verificar que nuestra solución provee verdaderamente el óptimo global. Si ϕw es discontinua en algunos valores de A , debe-

mos explorar la posibilidad de que una frontera zonal coincida con esos valores de A .

Perturbaciones

Comenzamos proponiendo fronteras tentativas para valores estimados de A_k , $k=1, \dots, K-1$. Las diferencias $w(c_{k+1}, A_k) - w(c_k, A_k) = \epsilon_k$ son errores que se corrigen moviendo estas fronteras. Los cálculos requeridos de las derivadas para cambios infinitesimales en A_k pueden ser engorrosos. En su lugar se pueden introducir cambios finitos pequeños ΔA_k , uno a la vez, calcular sus efectos en las ϵ_k , suponer que existe una relación lineal entre las ΔA_k y las ϵ_k , establecer $N-1$ ecuaciones simultáneas, resolverlas de tal forma que se cancelen las ϵ_k , y repetir si es necesario.

Procedimiento iterativo

El siguiente procedimiento es aplicable independientemente de que se trate de un problema uni o bidimensional.

- 1 Suponer fronteras interzonales
- 2 Calcular los valores óptimos de las c_k , $k=1, \dots, K$
- 3 Calcular las coordenadas de las fronteras entre cada par de zonas vecinas k y l de tal manera que $\sum_{i=1}^n w(c_{ik}, Z_i) = \sum_{i=1}^n w(c_{il}, Z_i)$ en cada punto de la frontera kl ; si estas fronteras no pueden localizarse, se repiten estos pasos iniciando con nuevas fronteras supuestas
- 4 Repetir los pasos 3 y 4 como sea necesario para alcanzar el grado deseado de convergencia.

El procedimiento generalmente converge lentamente, por lo que se debe usar alguna forma de extrapolación.

En problemas no reducibles a una dimensión

Consideremos el problema general en que ha de zonificarse una región donde se construirán estructuras de los tipos $i=1, \dots, n$. El costo inicial

c_i de cada estructura del tipo depende del vector c_i de sus coeficientes de diseño y puede depender del sitio en que se erija, mientras que la esperanza D_i del valor presente de las pérdidas por sismo en esta estructura es función de c_i y del vector Z_i de los parámetros que definen la sismicidad del sitio y que son relevantes al comportamiento de una estructura de este tipo.

Sea ϕ_i la esperanza del valor presente del número de estructuras tipo i que en el sitio se construirán por unidad de área y sean $w(c, Z) = \sum_{i=1}^n w_i(c_i, Z_i) \phi_i$ y $\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i$, en que c y Z son los vectores de c_i y Z_i respectivamente. Entonces la condición de optimalidad que expusimos para problemas unidimensionales se traduce en que dados c y Z , para cada frontera los w sean iguales a ambos lados de la misma. Ello sugiere el empleo de métodos en que se postule una zonación, alternadamente se calculen los coeficientes de diseño óptimos para cada tipo de estructura en cada zona y a partir de estos se obtengan ecuaciones que permiten calcular nuevas fronteras entre las zonas.

Este método iterativo converge muy lentamente, así que en la práctica es casi obligado el uso de fórmulas de extrapolación, como la de Aitken (García-Pérez y Rosenblueth 1994a).

Como ilustración consideremos el problema muy académico que resolvimos en zonación para diseño de minimización del costo inicial.

La condición necesaria a satisfacer a lo largo de la frontera entre las zonas vecinas k y k' está representada por

$\Delta w = \sum_{i=1}^2 \phi_i (w_{ik} - w_{ik'}) = 0$ Antes de zonificar, a menudo es suficientemente preciso tomar $w_i = c_i^{\alpha_i} + \gamma_i (Z_i / c_i)^{\beta_i}$; donde α_i , β_i y γ_i son constantes. Entonces, dado k y k' debe cumplirse que $Z_2^{\beta_2} = a + bZ_1^{\beta_1}$ donde a y b son funciones de α_i , β_i , γ_i y ϕ_2/ϕ_1 ; $i=1,2$. Tomaremos para ilustrar $\alpha=\gamma=1$ y $\beta=2$.

Si una frontera es recta, tiene que pasar por $(Z_1, Z_2) = (0,0)$ ya que en $Z_2^2 = a + bZ_1^2$, $b \neq 0, \infty$ que corresponderían a Z_2 constante o Z_1 constante respectivamente lo que implica que $a=0$, $b>0$. De acuerdo con lo anterior podemos escribir:

$c_{1k} - c_{1k'} + c_{2k'} = 0$; $3(1/c_{1k}^2 - 1/c_{1k'}^2)Z_1^2 + (1/c_{2k}^2 - 1/c_{2k'}^2)Z_2^2 = 0$. Por otra parte c_{ik} debe estar entre los límites 0 y $2^{1/3}=1.26$ que corresponden respectivamente a $Z_i=0,1$. Pero $c_{ik}=(2/3)^{1/3}=0.87$ correspondería a $b=0$ o ∞ que no puede ser. De aquí que $0 < c_{11} < 0.87 < c_{12} < 1.26$. También $0 < c_{22} < 0.87 < c_{21} < 1.26$, y si $1/c_{11}^2 - 1/c_{12}^2 > 0$ entonces $1/c_{21}^2 - 1/c_{22}^2 < 0$ y viceversa, con lo que $Z_2/Z_1 = [(1/c_{11}^2 - 1/c_{12}^2)/(1/c_{22}^2 - 1/c_{21}^2)]^{1/2}$. De lo anterior, para la fig 8a la solución estará dada por $0 < c_{11} \leq c_{22} < 0.87 < c_{12} \leq c_{21} < 1.26$ que nos lleva a $Z_2/Z_1 \geq 1$; por otra parte si $0 < c_{22} \leq c_{13} < 0.87 < c_{23} \leq c_{12} < 1.26$, esto implica que $Z_2/Z_1 \leq 1$. Por ejemplo para $c_{11}=0.5$, $c_{12}=1$, $c_{21}=1.1$, $c_{22}=0.6$, $Z_2/Z_1=1.54$; $c_{13}=0.6$, $c_{12}=1$, $c_{23}=1.1$, $c_{22}=0.5$, $Z_2/Z_1=0.65$. También la zonificación mostrada en la fig 8b satisface la condición necesaria de optimalidad mencionada con $c_{11}=c_{23}$, $c_{12}=c_{21}$: $0 < c_{11}=c_{22} < 0.87 < c_{12}=c_{21} < 1.26$.

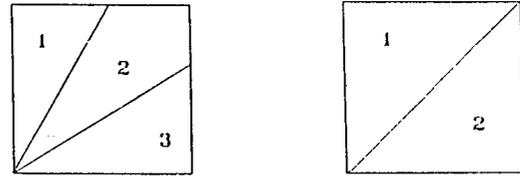


Fig 8. Ejemplo iterativo para minimización del costo total

ZONACIÓN CON RESTRICCIONES EN LAS FRONTERAS

Deseamos ahora que todas las fronteras interzonales coincidan con porciones de algunas líneas predeterminadas. Estas líneas definen un número, digamos, P de celdas elementales, tales como los municipios. El vector de los parámetros de la sismicidad, correspondiente al diseño más conservador para el i -ésimo tipo en la P -ésima celda elemental se denotará por Z_{ip} . El problema puede visualizarse como la asignación de cada celda a una zona. Esto puede realizarse por ensayos exhaustivos. Comparado con otros métodos en este artículo, el procedimiento puede ser práctico, especialmente para minimización del costo total, si P es pequeño y n es grande, puesto que el número de ensayos es independiente de n . Por ejemplo con $P=10$ y $K=2$ el

número de posibilidades es 511. Para valores grandes de P resulta impráctico. La zonación cercana a la óptima puede obtenerse encontrando las fronteras óptimas sin restricciones y los correspondientes coeficientes de diseño, y posteriormente ajustando ambos mediante la asignación de las celdas elementales intersectadas por estas fronteras a una u otra zona de acuerdo con una regla sencilla. Por ejemplo, la celda completa puede asignarse a la zona a la que contribuye el valor mayor de $\int \phi u dA$ o de $\int \phi w dA$ dependiendo de la clase de zonación. Alternativamente podemos comparar el incremento en U o en W que resulta de asignar la celda a cada zona en la que parte de la celda cae y escogiendo la decisión que causa el menor aumento. Si es necesario podemos realizar esto celda por celda y repetir el proceso, aunque esto rara vez se justifica. El error así introducido generalmente será insignificante comparado con el costo de zonación, ya que para las celdas generalmente es mucho más pequeño que para las zonas y, puesto que ya se está cerca del óptimo, cualquier ajuste probablemente produce un incremento pequeño de orden superior en U o en W .

Para problemas de minimización del costo inicial de tamaño moderado, podemos recurrir a un procedimiento que trata directamente con las fronteras restringidas. Se describe a continuación dicho procedimiento.

Minimización del costo inicial

Es conveniente como primer paso discretizar los coeficientes. En la práctica esto no ocasiona pérdida de exactitud, ya que difícilmente un reglamento especificaría coeficientes de cortante basal con más de dos dígitos decimales. Digamos que c_j^i denota el j -ésimo valor discreto del coeficiente para el i -ésimo tipo estructural, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, n_i$ y hagamos que $c_j^i \triangleq Z_{ip}$ represente el menor valor discreto de c_i no menor que Z_{ip} , $p=1, \dots, P$. No existe ventaja alguna en considerar valores que no satisfagan $c_j^i \triangleq Z_{ip}$; esta condición puede reducir algunas de las n_i .

Una vez que se han escogido las c_j^i asignamos a cada zona k n coeficientes c_k^i , $k=1, \dots, K$, formando así una configuración. Las configuraciones deben satisfacer las siguientes condiciones.

- 1 Para cada i existe en cada configuración al menos una zona k tal que $c_{ik} = \max_j c_j^i$; de otra forma habría algunas Z_{ip} que no se cubrirían con ningún coeficiente c_{ik} y por tanto algunas celdas elementales no quedarían en ninguna zona.
- 2 En cualquier configuración dada no existirán ninguna zona que tengan los mismos coeficientes. Por lo que para dos zonas cualesquiera k y l no se permite tener $c_{ik} = c_{il}$ para toda i ; de otra manera las dos formarían una sola zona.
- 3 No será posible para cualquier configuración postulada, resultar de la mera reenumeración de las zonas en otra configuración postulada, ya que, las dos configuraciones serían la misma.
- 4 Los coeficientes en cada celda elemental deberían ser cubiertos por aquellos de al menos una zona. La condición 1 es un corolario de esta cuarta condición.

Ejemplos de configuraciones postuladas que satisfacen las tres primeras condiciones se muestran en las tablas 1 (para $n=2$, $n_1=n_2=4$, $K=2$) y 2 (para $n=2$, $n_1=3$, $n_2=2$, $K=3$). Introduciendo la condición 4 se puede reducir el número de configuraciones posibles. En estas tablas hemos identificado los coeficientes c_{ik} con enteros que aumentan con los valores de los coeficientes.

Nótese como una ilustración que la tabla 2 no contiene las siguientes configuraciones. 2,2;1,1;1,2, debido a que viola la condición 1. 3,2;1,1;3,2, la que viola la condición 2; ni 3,2;1,2;1,1, que viola la condición 3, ya que es la misma que 3,2;1,1;1,2 reordenada. De acuerdo con la condición 4 si los valores de Z para alguna celda elemental fueran 2,2, entonces la configuración 3,1;1,2;1,1 será borrada puesto que ninguna zona cubriría esa celda.

Una vez que las posibles configuraciones han sido identificadas debemos asignar cada celda a una zona en cada configuración. Cuando las Z_{ip} de las celdas son cubiertas por los coeficientes solamente en una zona de la configuración, asignamos la celda a esta zona. Cuando ellas están cubiertas por los coeficientes

Tabla 1. Configuraciones para $n_1=n_2=4, K=2$

Z o n a			
1		2	
c_{11}	c_{21}	c_{12}	c_{22}
4	4	1	1
4	4	1	2
4	4	1	3
4	4	1	4
4	4	2	1
4	4	2	2
4	4	2	3
4	4	2	4
4	4	3	1
4	4	3	2
4	4	3	3
4	4	3	4
4	4	4	1
4	4	4	2
4	4	4	3
4	1	1	4
4	1	2	4
4	1	3	4
4	2	1	4
4	2	2	4
4	2	3	4
4	3	1	4
4	3	2	4
4	3	3	4

Tabla 2. Configuraciones para $n_1=3, n_2=2, K=3$

Z o n a					
1		2		3	
c_{11}	c_{21}	c_{12}	c_{22}	c_{13}	c_{23}
3	2	1	1	1	2
3	2	1	1	2	1
3	2	1	1	2	2
3	2	1	1	3	1
3	2	1	2	2	1
3	2	1	2	2	2
3	2	1	2	3	1
3	2	2	1	2	2
3	2	2	1	3	1
3	2	2	2	3	1
3	1	1	2	1	1
3	1	1	2	2	1
3	1	1	2	2	2
3	1	2	2	1	1
3	1	2	2	2	1

en dos o más zonas asignamos la celda a la zona para la que $\sum_{i=1}^n \phi_i u_i$ integrada sobre la celda sea el menor valor. (Esto es equivalente a la introducción de líneas donde ζ cambia de signo para la zonación con fronteras sin restricción.) Finalmente calculamos las U correspondientes y seleccionamos la configuración que dé el valor menor de U .

El número de posibles configuraciones que satisfacen las cuatro condiciones es casi independiente del número de celdas elementales. El primer número puede llegar a ser imprácticamente grande para K grande.

Minimización del costo total

El siguiente procedimiento iterativo permite cumplir con las restricciones entre las zonas. (En el apéndice se explican y justifican las expresiones que se mencionan a continuación.)

- 1 Estimar los vectores c_{ik} tal que minimicen $W = \sum_{k=1}^K \sum_i W_{ik}$ donde W_{ik} es la suma de W_{ipk} para toda p en k cuando las estructuras i son diseñadas para c_{ik} ; W_{ipk} se calcula como W_{ip} con c_{ip} sustituida por c_{ik}
- 2 Asignar cada celda p a la zona k en la que W_{ipk} tiene el menor valor. En general solo es necesario intentar algunas de las k zonas para cada celda
- 3 Calcular W
- 4 Calcular los valores óptimos de c_{ik} para cada zona
- 5 Repetir los pasos 2-4 como sea necesario. Después de los dos primeros ciclos puede ser recomendable emplear un procedimiento de extrapolación sobre los c_{ik} , puede emplearse la fórmula de Aitken (García-Pérez y Rosenblueth 1994a). ("Como sea necesario" se refiere a la diferencia entre W al final de un ciclo y el valor obtenido cuando cada celda se trata como una zona.)

MICROZONACIÓN

La microzonación difiere de la zonación en cuatro aspectos esenciales: 1) Es práctico a menudo

restringir las fronteras intermicrozonales de tal forma que coincidan con líneas cercanamente espaciadas. 2) Las fronteras entre las microzonas están cercanamente asociadas con las variaciones en la estratigrafía del suelo o las propiedades. 3) Estas variaciones o aquellas en las limitaciones arquitectónicas pueden introducir cambios no proporcionales en el costo inicial. 4) El periodo dominante del terreno puede cambiar substancialmente de un sitio a otro.

El tamaño generalmente pequeño de las celdas elementales favorece el procedimiento que consiste en el cálculo de las fronteras óptimas sin restricción seguidas de un ajuste para hacerlas coincidir con las fronteras de las celdas, puesto que el ajuste introduce probablemente errores menores que en la zonación.

La guía proporcionada por las variaciones en las propiedades del suelo o la estratigrafía mejorará la estimación inicial de las fronteras entre las microzonas.

En la minimización para el costo inicial, el hecho de que el costo para un conjunto dado

de coeficientes de diseño pueda variar de una localización a otra de manera no proporcional hace necesario proceder en forma iterativa. La razón principal para la variación es que el costo de la cimentación para coeficientes de cortante basal grandes y relaciones de esbeltez pueden ser muy sensitivos al cortante basal de diseño y a las propiedades del suelo para profundidades del orden de la mitad del ancho de la cimentación o mayor. Excepcionalmente, las restricciones arquitectónicas pueden causar también este tipo de variación. El procedimiento iterativo consiste en establecer una microzonación preliminar con ϕ locales equivalentes, estimadas como si las u_i fueran independientes del sitio, y repitiendo como sea necesario.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

Minimización del costo inicial con restricciones

La fig 9 muestra una región con sus límites jurisdiccionales e isosistas para dos tipos de estructura. Se desea zonificar para dos zonas.

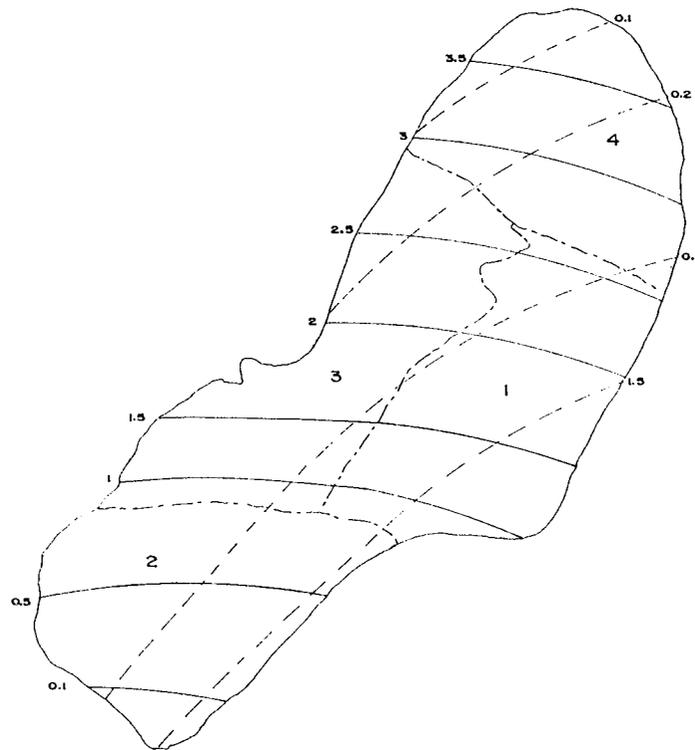


Fig 9. Límites jurisdiccionales e isosistas para dos tipos de estructura

Se determina para cada celda p los valores de Z_{ip} y F_{ip} que representan la capacidad máxima requerida no discretizada para el tipo i en la celda p , y el número de estructuras que se construirán en p respectivamente, estos valores se consignan en la tabla 3. Si no zonificáramos o si cada celda constituyera una zona, el costo total de las estructuras sería $U = \sum_{p=1}^P U_p$ donde $U_p = \sum_{i=1}^2 U_{ip}$. Asignamos valores posibles a c_{ik} ; $i=1,2$; $k=1,2$, de acuerdo con las restricciones señaladas anteriormente. Para este ejemplo escogemos $c_{1k}=1,2,3$ y $c_{2k}=1,3,4$. No se necesitaron $c_{1k}=4$ ni $c_{2k}=2$ pues no hay ninguna Z_{1p} entre 3 y 4 ni Z_{2p} entre 1 y 2.

La tabla 4 presenta el número de configuraciones posibles para el ejemplo en estudio. Se puede observar que las siguientes configuraciones no son posibles. 3,4,3,4, ya que se trataría de una sola zona y no de dos; 1,1,3,4, ya que con un cambio de notación sería la misma que la de la primera fila en la tabla 4. Como siguiente paso asignamos cada celda a una de las zonas, por ejemplo para la configuración 3,4,2,3, se tiene que si $p=1$: $2.1 < 2.3$, $2.7 < 4$ por lo que se asigna a la zona 1 (no a la 2, puesto que $2.1 > 2$); $p=2$: $1.7 < 2$, $0.8 < 3$ se asigna a la zona 2 (no a la 1, puesto que $c_{11} > c_{12}$ y $c_{21} > c_{22}$); $p=3$: $0.7 < 2$, $2.9 < 3$ se asigna a la zona 2; $p=4$: $0.7 < 3$, $3.8 < 4$ se asigna a la zona 1 (no a la 2, ya que $3.8 > 3$).

Calculamos los costos para todas las configuraciones y seleccionamos la configuración que dé el menor valor de U , para el ejemplo en consideración la zonación queda como se indica en la fig 10, con $c_{11}=c_{12}=3$, $c_{21}=4$ y $c_{22}=1$.

Minimización del costo total con restricciones

La fig 11 muestra una región con 16 municipios y las isosistas correspondientes a dos tipos de estructura. Se desea zonificar en cuatro zonas. Para este ejemplo tenemos que $I=2$, $K=4$, $p=9$ y suponemos que el costo está dado por:

$$W_{ip} = (c_i + \bar{Z}_i / 100c_i^2) \int \int \phi_i(x,y) d$$

Tabla 3. Capacidad máxima requerida y número de estructuras

p	Z_{1p}	Z_{2p}	F_{1p}	F_{2p}
1	2.1	2.7	1	0
2	1.7	0.8	2	2
3	0.7	2.9	3	1
4	0.7	3.8	3	0

Tabla 4. Configuraciones posibles

c_{11}	c_{21}	c_{12}	c_{22}
3	4	1	1
3	4	1	3
3	4	1	4
3	4	2	1
3	4	2	3
3	4	2	4
3	4	3	1
3	4	3	3
3	3	1	3
3	3	2	4

En la tabla 5 se consignan los valores de $\phi_{ip}A_p$ donde A_p es el área de los municipios o celdas, \bar{Z}_{ip} calculada como $\bar{Z}_i = \int \phi_i Z_i dA / \int \phi_i dA$, c_{ip} son los coeficientes óptimos sin zonación de cada celda calculados a partir de $c_i = (0.02 \bar{Z}_i)^{1/3}$, asimismo se muestran los valores de $\bar{Z}_i \phi_i A$ de cada celda.

La tabla 6 presenta los valores de c_{ik} , $k=1, \dots, 4$, los valores de W_{pk} para las 6 primeras celdas y primera iteración, suponiendo que cada celda se coloca en la zona k . No es necesario probar cada celda en cada una de las cuatro zonas sino sólo en aquellas en que los coeficientes c_{ip} se acercan a los asignados a la zona. Por iteraciones calculamos el valor mínimo de W que nos conduce a la zonificación que se muestra en la fig 12. Los coeficientes óptimos para cada zona se calculan como $c_{ik} = (0.02 \sum_p \bar{Z}_{ip} \phi_{ip} / \sum_p \phi_{ip})^{1/3}$, lo que resulta en: $c_{11}=c_{23}=c_{24}=0.13$, $c_{13}=c_{22}=0.14$, $c_{12}=0.15$, $c_{21}=0.12$ y $c_{14}=0.16$. Las sumas abarcan todas las celdas de la zona k .

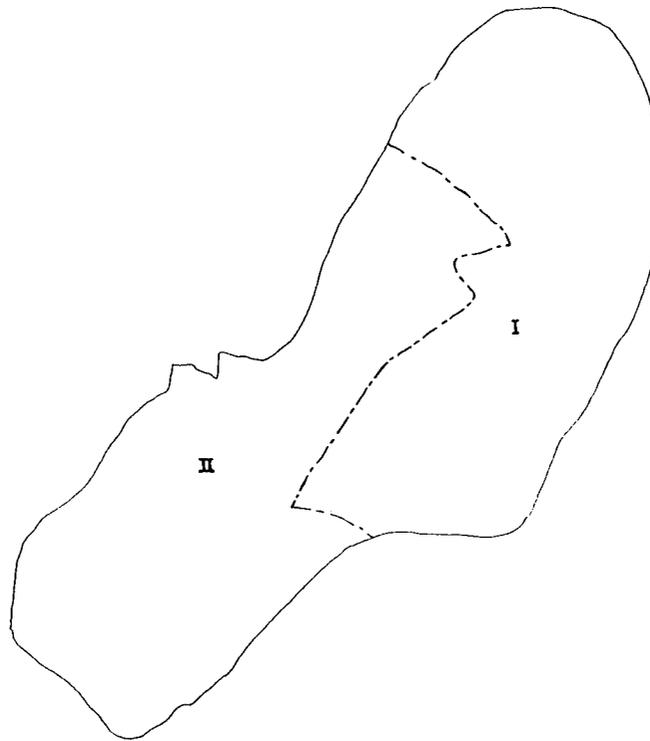


Fig 10. Zonificación para minimización del costo inicial

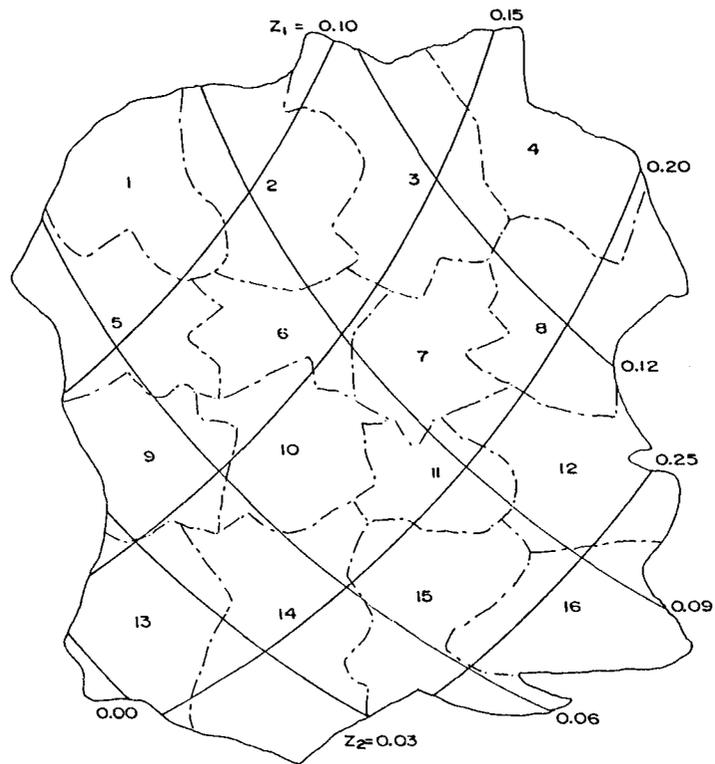


Fig 11. Límites jurisdiccionales e isosistas para dos tipos de estructura

Tabla 5. Datos de las distintas celdas de la región a zonificar

p	$\phi_{1p}A_p$	$\phi_{2p}A_p$	Z_{1p}	Z_{2p}	C_{1p}	C_{2p}	$Z_{1p}\phi_{1p}A_p$	$Z_{2p}\phi_{2p}A_p$
1	1	0	0.08	0.08	0.12	0.12	0.08	0.00
2	3	3	0.11	0.10	0.13	0.13	0.33	0.30
3	1	2	0.14	0.11	0.14	0.13	0.14	0.22
4	8	3	0.18	0.13	0.15	0.14	1.44	0.39
5	9	1	0.10	0.07	0.13	0.11	0.90	0.07
6	3	8	0.12	0.08	0.13	0.12	0.36	0.64
7	1	1	0.16	0.10	0.15	0.13	0.16	0.10
8	4	6	0.20	0.12	0.16	0.13	0.80	0.72
9	0	9	0.13	0.05	0.14	0.10	0.00	0.45
10	1	6	0.16	0.07	0.15	0.11	0.16	0.42
11	0	7	0.19	0.08	0.16	0.12	0.00	0.56
12	5	4	0.22	0.10	0.16	0.13	1.10	0.40
13	1	6	0.18	0.02	0.15	0.07	0.18	0.12
14	8	7	0.19	0.04	0.16	0.09	1.52	0.28
15	6	9	0.22	0.07	0.16	0.11	1.32	0.63
16	9	3	0.26	0.08	0.17	0.12	2.34	0.24

Tabla 6. Valores de coeficientes y costos

k	C_{1k}	C_{2k}	1	2	3	4	5	6
1	0.13	0.13	0.18	1.15	0.60		1.87	2.02
2	0.15	0.13	0.19		0.60	2.46		
3	0.15	0.09			0.65			2.12
4	0.16	0.11					1.96	

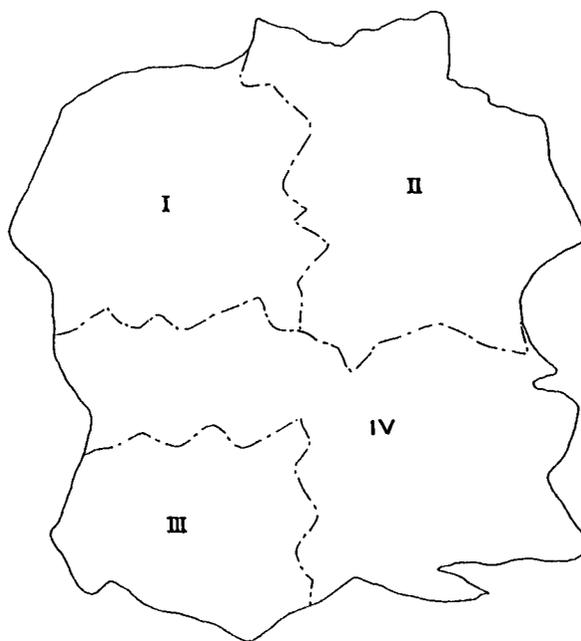


Fig 12. Zonificación para minimización del costo total

CONCLUSIONES

La zonación óptima generalmente minimiza el valor presente esperado del costo inicial o del costo total de las estructuras en una región. Las fronteras interzonales preferentemente coinciden con fronteras jurisdiccionales. Ensayes exhaustivos resuelven el problema de manera exacta, pero son difíciles de manejar en casos prácticos. Desarrollamos métodos eficientes que optiman fronteras sin restricción, y las ajustan de tal forma que cumplen con las restricciones y dan soluciones cercanas a las óptimas. Se presenta un método exacto para coeficientes de diseño discretizados con fronteras restringidas para minimización del costo total.

Las fronteras sin restricción coinciden con las curvas isoparamétricas cuando el problema puede reducirse a una dimensión y, más generalmente, coincide segmentalmente con estas curvas.

Se trata la microzonación como un caso especial de la zonación en la que se reconoce la dependencia del costo inicial del sitio.

RECONOCIMIENTO

Agradecemos a los Doctores Luis Esteva y Mario Ordaz la revisión crítica del manuscrito y sus sugerencias constructivas.

APÉNDICE

Se presentan a continuación las ecuaciones empleadas en la minimización del costo total.

Digamos que $i=1,\dots,I$, $p=1,\dots,P$ y $k=1,\dots,K$ representan tipo de estructura, celda elemental y zona respectivamente. Si cada celda fuera una zona el costo inicial de la estructura tipo i en el punto (x,y) en la celda p sería $u_i(\mathbf{c}_{ip},x,y)$ donde \mathbf{c}_{ip} sería el vector de los parámetros de diseño (no necesariamente coeficientes) para el tipo i en esta celda. La esperanza del valor presente de todas las estructuras por unidad de área sería:

$$U_i(\mathbf{c}_{ip},x,y) = u_i(\mathbf{c}_{ip},x,y)\phi_i(x,y) \quad (A1)$$

donde $\phi_i(x,y) = \int \psi_i(x,y,t)e^{-\gamma t} dt$, $\psi_i(x,y,t)$ = número esperado de estructuras tipo i que se construirán en el punto (x,y) por unidad de área

y por unidad de tiempo y γ = tasa de descuento (no necesariamente constante).

Supongamos que los movimientos del temblor arriban a cada sitio en p de acuerdo a un proceso múltiple de Poisson y que γ es independiente del tiempo. Hagamos que κ denote la tasa de excedencia de una intensidad umbral suficientemente pequeña para no causar daño, y $L_i(\mathbf{c}_{ip},x,y)$ la esperanza de la pérdida en una estructura tipo i cuando ocurre un temblor con intensidad arriba del umbral. La esperanza de la pérdida al tiempo t cuando se construye la estructura será:

$$\kappa L_i(\mathbf{c}_{ip},x,y) \int_0^{\infty} e^{-(\gamma+\kappa)t} dt = \kappa L_i(\mathbf{c}_{ip},x,y) / (\gamma + \kappa) \quad (A2)$$

La pérdida correspondiente a todos los temblores que ocurren después de t será $\kappa L_i(\mathbf{c}_{ip},x,y) / \gamma$, y, para todas las estructuras por unidad de área, construidas entre los tiempos t y $t+dt$, $\psi_i(x,y,t)\kappa L_i(\mathbf{c}_{ip},x,y)dt / \gamma$, tal que la esperanza del valor presente de tales pérdidas será:

$$\begin{aligned} V_i(x,y) &= [\kappa L_i(\mathbf{c}_{ip},x,y) / \gamma] \int_0^{\infty} \psi(x,y,t)e^{-\gamma t} dt \\ &= \kappa \phi_i(x,y) L_i(\mathbf{c}_{ip},x,y) / \gamma \end{aligned} \quad (A3)$$

Combinando con la ec A1 e integrando sobre p encontramos el valor esperado de todos los tipos i que se construirán en p si p fuera una zona, $W_{ip}(\mathbf{c}_{ip}) = \int_p [U_i(\mathbf{c}_{ip},x,y) + V_i(\mathbf{c}_{ip},x,y)] dx dy$:

$$W_{ip}(\mathbf{c}_{ip}) = \int_p [u_i(\mathbf{c}_{ip},x,y) + \kappa L_i(\mathbf{c}_{ip},x,y) / \gamma] \phi_i(x,y) dx dy \quad (A4)$$

De hecho en cada punto (x,y) , L_i es un funcional del vector de parámetros Z_{ip} de la sismicidad que puede afectar la estructura de tipo i en (x,y) y de los parámetros de diseño. De manera más general, para considerar el hecho de que algunas estructuras dejarán de existir, debemos reemplazar $\phi_i(x,y)$ con:

$$\phi_i^*(x,y) = \int_0^{\infty} \psi_i^*(x,y,t)e^{-\gamma t} dt \quad (A5)$$

en la ec A3. Aquí ϕ_i^* representa las estructuras i construidas, menos aquellas que dejan de existir, por unidad de tiempo y área. Si reconocemos

en γ la dependencia del tiempo o los tiempos de arribo no Poissonianos de temblores debemos reemplazar la ec A3 con:

$$L_i(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{h^-}^{h^+} \int_0^{\infty} L_{ih}(c_{ip}, x, y) p_{hj}(x, y, h, t_j) \Psi_i^*(x, y, t_j) e^{-\gamma t} dt_j dh \quad (A6)$$

donde j identifica el j -ésimo temblor de intensidad h , que ocurre al tiempo t_j , h^- es el umbral h , h^+ es la intensidad máxima considerada, $p_{hj}(\dots)$ la función de densidad de probabilidades del tiempo en que el j -ésimo temblor de intensidad h ocurre, y $\Psi_i^*(x, y, t)$ el número de estructuras tipo i en existencia por unidad de área al tiempo t_j .

REFERENCIAS

- García-Pérez, J y Rosenblueth, E (1994a)**, "Zonación sísmica para minimización del costo inicial en problemas reducibles a una dimensión", *Ingeniería Sísmica*, **47**, ago
- García-Pérez, J y Rosenblueth, E (1994b)**, "Zonación sísmica para minimización del costo total en problemas reducibles a una dimensión", *Ingeniería Sísmica*, **48** dic
- Rosenblueth, E y García-Pérez, J (1994)**, "Optimal zoning". *Journal of Engineering Structures*, **16**, No 7, pp 460-469, oct